Uitwerking Toets Statistiek voor INF en BIT (Module 6 -201400256), 29-01-2014

Opgave 1

a. *Als de mediaan kleiner is dan het steekproefgemiddelde, dan is de verdeling scheef naar rechts.*
Ja, het gemiddelde is wel gevoelig voor relatief grote waarnemingen ter rechterzijde.

b. *Met een QQ-plot bepalen we altijd of voor een bepaalde data set de normale verdeling passend is.*
Nee, het kan ook een exponentieel QQ-plot zijn.

c. *Een zuivere schatter is beter dan een onzuivere schatter.*
Nee, het draait om de waarde van de verwachte kwadratische fout (ofwel: een zuivere schatter kan een grote variantie hebben, of: de verwachte kwadratische fout = onzuiverheid^2 + variantie)

d. *De verwachte kwadratische fout van het steekproefgemiddelde, als schatter van het populatiegemiddelde, is* $\frac{\sigma^2}{n}$.
Ja, bij een zuivere schatter, zoals $\overline{X}$, is de verwachte kwadratische fout gelijk aan de variantie, dus $\frac{\sigma^2}{n}$.

e. *Het onderscheidend vermogen is de kans op een juiste beslissing onder de nulhypothese.*
Nee, het is de kans op een juiste beslissing als de alternatieve hypothese waar is.

Opgave 2

a. 1. X_1en X_2 zijn de o.o. aantallen kandidaten die kiezen voor split onder de jongeren (< 40) resp. onder de ouderen: X_1 *is* $B(382, p_1)$- en X_2 is $B(192, p_2)$-verdeeld.
2. Toets H_0: $p_2 = p_1$ tegen H_1: $p_2 > p_1$ met $\alpha = 1\%$
3. $Z = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ met $\hat{p} = \frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$
4. Z is onder H_0 $N(0,1)$-verdeeld.
5. Waargenomen: $\hat{p}_2 = \frac{116}{192}$ en $\hat{p}_1 = \frac{187}{382}$, $\hat{p} = \frac{116+187}{382+192} \approx 0.528$, dus $z\ = \frac{0.1146}{0.04416} \approx 2.59$
6. Rechtseenzijdig KG: $Z \geq 2.33$ (uit de standaardnormale tabel voor een rechter staartkans 1%)
7. $Z = 2.59$ ligt in het KG, dus H0 verwerpen
8. Met $\alpha = 1\%$ is aangetoond dat de ouderen vaker voor split kiezen dan de jongeren.

b. $\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \pm c \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ met bovengenoemde waarden: $\hat{p}_2 = \frac{116}{192}$ en $\hat{p}_1 = \frac{187}{382}$ en $c = 1.645$, zodat $\Phi(c) = 0.975$
Dus $0.1146 \pm 1.645 \cdot 0.0436$, ofwel het gevraagde 90%-BI$(p_1 - p_2) =\ (0.043, 0.186)$

Opgave 3

a. (*opmerking: reactiesnelheid verhogen betekent kortere reactietijd, dus "voor-na" is dan positief*)
Er is sprake van gepaarde waarnemingen, dus bepalen we de **verschilreeks:**
7, -1, 5, -6, 21, 5, 15, -4, 9, 12.
Met de rekenmachine vinden we voor de verschillen: $\overline{x} = 6.3$ en $s \approx 8.47$

1. De 10 reactiesnelheid-verhogingen (voor - na) $X_1, \ldots, X_{10}$ zijn o.o. en $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld met onbekende verwachte verhoging μ en onbekende σ^2.
2. Toets H_0: $\mu = 0$ tegen H_1: $\mu > 0$ met $\alpha = 5\%$
3. $T = \frac{\overline{X} - 0}{\frac{S}{\sqrt{10}}}$
4. onder H_0 is T t_9-verdeeld.
5. $t = \frac{6.3}{\frac{8.47}{\sqrt{10}}} \approx 2.35$
6. Rechtseenzijdige toets: verwerp H_0 als $T \geq c = 1.833$ (uit de t_9-tabel bij α = 5%)
7. Verwerp H_0, want $T = 2.35 > 1.833$.
8. Aangetoond is dat de training de gemiddelde reactiesnelheid vergroot, met significantieniveau 5%

b. 1. de hypothesen: we toetsen H_0: de mediaan $m = 0$ $(p = \frac{1}{2})$ tegen H_1: $m > 0$ $(p > \frac{1}{2})$
2. de waarde van de toetsingsgrootheid: het aantal positieve verschillen $X = 7$
3. De toets is rechtseenzijdig, dus verwerp H_0 als de overschrijdingskans $P(X \geq 7|H_0) \leq \alpha = 5\%$

Voor H_0 geldt $p = \frac{1}{2}$, dus $P(X \geq 7|H_0) = 1 - P(X \leq 6|H_0) = 1 - 0.828 = 17.2\%$

4. Verwerp H_0 wat de overschrijdingskans > α. De conclusie bij een significatieniveau van 5% is, dat de training niet heeft geleid tot structureel snellere reacties.

Of bepaal het kritieke gebied van de vorm: $X \geq c$ (rechtseenzijdig).

Omdat voor $p = \frac{1}{2}$ is $P(X = 10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.001$, $P(X = 9) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.010$,

$P(X = 8) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.044$, dus $P(X \geq 8) \approx 5.5\% > \alpha$. Dus $c = 9$.

$X = 7$ ligt dus niet in het kritieke gebied, dus H_0 niet verwerpen.

Opgave 4

a. Het 95%-BI(σ^2) = $\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2}, \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right) = \left(\frac{7 \cdot 7.85^2}{16.01}, \frac{7 \cdot 7.85^2}{1.69}\right) \approx (26.9,\ 255.2)$

met $P(\chi^2_{n-1} \leq c_1) = P(\chi^2_{n-1} \geq c_2) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$, dus $c_1 = 1.69$ en $c_2 = 16.01$.

b. De standaardafwijkingen zijn nagenoeg gelijk, dus ze zullen ook niet aantoonbaar verschillen.

c. 1. het gaat om twee onafhankelijke, aselecte steekproeven met omvang 8 resp. 10 van droogduren, uit de $N(\mu_1, \sigma^2)$-verdeling voor de witte verf en de $N(\mu_2, \sigma^2)$-verdeling voor de gele (gelijke σ's!)
(*Formeler: de opbrengsten* $X_1, \ldots, X_8, Y_1, \ldots, Y_{10}$ zijn o.o., $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ en $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$)

2. We toetsen $H_0: \mu_1 = \mu_2$ tegen $H_1: \mu_1 < \mu_2$ met α = 5%

3. Toetsingsgrootheid $T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}}$ met $S^2 = \frac{7S_1^2 + 9S_2^2}{8+10-2}$

4. T is onder H_0 t-verdeeld met $df = n_1 + n_2 - 2 = 16$

5. Waargenomen: $s^2 = \frac{7 \times 7.85^2 + 9 \times 8.27^2}{18} \approx 65.43$, dus $t = \frac{118.6 - 134.7}{\sqrt{65.43\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)}} = -4.20$

6. De toets is linkseenzijdig: **verwerp $\boldsymbol{H_0}$ als $\boldsymbol{T \leq -c}$**
met $c = 1.746$ uit de t_{16}-tabel

7. t = -4.20 ligt in het kritieke gebied, dus H_0 verwerpen.

8. We kunnen met onbetrouwbaarheid 5% stellen dat de witte verf gemiddeld sneller droog is dan de gele.

d. De scheefheidscoëfficiënt 0.75 en de kurtosis 4.3 wijken in beperkte mate af van de normale referentiewaarden 0 en 3.
De waarde van Shapiro-Wilk's $W = 0.965$ ligt **niet** in het kritieke gebied $W \leq 0.818$ (Shapiro-Wilk tabel met $n = 8$ en $\alpha = 5\%$), dus we kunnen de nulhypothese van normaliteit niet verwerpen, ofwel: voor de droogtijden van de witte verf kunnen we normaliteit veronderstellen.

e. $W = \sum_{i=1}^{8} R(X_i)$ is onder H_0 bij benadering normaal verdeeld met
$E(W) = \frac{1}{2}n_1(N+1) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 19 = 76$ en $var(W) = \frac{1}{12}n_1 n_2(N+1) = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 10 \cdot 19 \approx 126.7$.
$P(W \leq 58|H_0) = P(W \leq 58.5|H_0) = \Phi\left(\frac{58.5-76}{\sqrt{126.7}}\right) \approx \Phi(-1.55) = 1 - \Phi(1.55) \approx 6.06\%$,
dus **niet** verwerpen voor $\alpha = 1\%$ of 5%, maar wél voor 10%.

Opgave 5

(Pearson's) Chi kwadraat toets:

1. De aantallen N_1, N_2, N_3 en N_4 zijn multinomiaal verdeeld met bijbehorende kansen met p_1, p_2, p_3 en p_4
2. We toetsen $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.25$ tegen $H_1: p_i \neq 0.25$ voor tenminste één i met $\alpha = 0.05$
3. Toetsingsgrootheid: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(N_i - E_0N_i)^2}{E_0N_i}$ met $E_0N_i = 200 \cdot 0.25 = 50$, $i = 1, 2, 3$ en 4.
4. Onder H_0 heeft χ^2 een Chi kwadraat verdeling met aantal vrijheidsgraden $df = k - 1 = 3$.
5. Waargenomen: $\chi^2 = \frac{(55-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(59-50)^2}{50} + \frac{(46-50)^2}{50} = 4.44$
6. We verwerpen H_0 als $\chi^2 \geq c$. $\alpha = 0.05$, dus uit de χ^2_3-tabel volgt c = 7.81
7. De uitkomst 4.44 ligt niet in het kritiek gebied $\Rightarrow H_0$ **niet** verwerpen.
8. Bij onbetrouwbaarheid 5% achten we niet bewezen dat de verdeling over de vier gewichtsklassen afwijkt van die van vorig jaar.