LINEAR ALGEBRA Date : July 5, 2019
Time : 13.45 – 15.45 hrs

First read these instructions carefully:

This test contains 8 exercises. The complete solutions of Exercises 1, 2, 3, 4 and 5 must be accurately written down on a separate sheet, including calculations and argumentation.   **For the other exercises you are only required to fill in the final answers on the answer sheet at the end of this test. You must hand in this answer sheet as well as your hand written solutions to Exercises 1, 2, 3, 4 and 5.**   **The use of electronic devices is not allowed.**

1. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

   A is a 3×3 matrix with eigenvalues 1 and 0. Moreover,

$$E_0(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \qquad E_1(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

   Determine the matrix A.

2. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

   Given is

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

   Show that $\mathcal{B}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$.

3. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

   Given are square matrices A and B of the same size.

   a) Given that A and B are invertible, show that AB is invertible.

   b) Given that A and AB are invertible, show that B is invertible.

4. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

   Determine the stationary points of the function f given by:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_1x_2$$

   Recall that a point is a stationary point of a function if all partial derivatives are equal to 0.

5. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

   Assume x is an eigenvector of the matrix A as well as an eigenvector of the matrix B (but possibly with a different eigenvalue).

   Show that $AB - BA$ is <u>not</u> invertible.

6. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

The linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is given by

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine the representation matrix of T.

b) Determine the representation matrix of T^{-1}.

7. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

Consider the following system of equations:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 &= \gamma \end{aligned}$$

a) For which values for α, β, γ is the system of equations inconsistent?

b) For which values for α, β, γ does the system of equations have a unique solution?

c) Choose $\alpha = -8, \beta = 2$ and $\gamma = -2$. Determine the solution(s) of this system of equations.

8. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

Consider the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Given is that R is the row-reduced echelon form of the matrix A. In that case, a basis for Col A is given by:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Indicate which of the above four options are correct and which of these options are wrong.

For the exercises the following number of points can be obtained:

Exercise	1.	3 points	Exercise	2.	3 points	Exercise	3a.	3 points
Exercise	3b.	3 points	Exercise	4.	3 points	Exercise	5.	3 points
Exercise	6a.	3 points	Exercise	6b.	3 points	Exercise	7a.	3 points
Exercise	7b.	3 points	Exercise	7c.	3 points	Exercise	8.	3 points

The grade is determined by dividing the total number of points by 4 and adding 1.

LINEAIRE ALGEBRA Datum : 5 juli 2019
Tijd : 13.45 – 15.45 hrs

Lees eerst zorgvuldig deze instructies:

Deze toets bestaat uit 8 opgaven. De volledige uitwerkingen van opgaven 1, 2, 3, 4 en 5 moeten op apart papier worden geschreven, inclusief berekeningen en argumentatie. Voor de overige opgaven volstaat het uitsluitend de eindantwoorden/uitkomsten te noteren op het antwoordenblad aan het eind van deze toets. U dient zowel dit antwoordenblad als de handgeschreven uitwerkingen van opgaven 1, 2, 3, 4 en 5 in te leveren.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

1. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

   A is een 3×3 matrix met eigenwaarden 1 en 0. Bovendien,

$$E_0(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \qquad E_1(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

   Bepaal de matrix A.

2. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

   Gegeven is:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

   Laat zien dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$.

3. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

   Gegeven zijn vierkante matrices A en B met dezelfde afmetingen.

   a) Als gegeven is dat A en B inverteerbaar zijn, toon dan aan dat AB inverteerbaar is.

   b) Als gegeven is dat A en AB inverteerbaar zijn, toon dan aan dat B inverteerbaar is.

4. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

   Bepaal de stationaire punten van de functie f gegeven door:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_1x_2$$

   Bedenk dat een punt een stationair punt genoemd wordt als alle partiële afgeleiden van de functie gelijk zijn aan 0.

5. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

   Neem aan dat x een eigenvector is van de matrix A en ook een eigenvector is van de matrix B (maar mogelijk met een andere eigenwaarde).

   Toon aan dat $AB - BA$ niet inverteerbaar is.

6. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

   De lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   a) Bepaal de representatie matrix van T.

   b) Bepaal de representatie matrix van T^{-1}.

7. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

   Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 &= \gamma \end{aligned}$$

   a) Voor welke waarden van α, β, γ is het stelsel van vergelijkingen inconsistent?

   b) Voor welke waarden van α, β, γ heeft het stelsel van vergelijkingen een unieke oplossing?

   c) Kies $\alpha = -8, \beta = 2$ and $\gamma = -2$. Bepaal de oplossing(en) van het stelsel van vergelijkingen.

8. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

   Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   We weten dat R de rij-gereduceerde echelon vorm is van de matrix A. In dat geval, wordt een basis voor Col A gegeven door:

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

   c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   Geef aan voor elk van deze vier opties of de optie correct is of niet.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	3 punten	Vraagstuk	2.	3 punten	Vraagstuk	3a.	3 punten
Vraagstuk	3b.	3 punten	Vraagstuk	4.	3 punten	Vraagstuk	5.	3 punten
Vraagstuk	6a.	3 punten	Vraagstuk	6b.	3 punten	Vraagstuk	7a.	3 punten
Vraagstuk	7b.	3 punten	Vraagstuk	7c.	3 punten	Vraagstuk	8.	3 punten

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 4 punten op te tellen en door 4 te delen.