Mathematics C1 (Cayley)

Datum : 21 februari 2014
Tijd : 15.45 – 16.45 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.
Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & + & 5x_5 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & - & 10x_5 & = & \beta \\ x_1 & - & x_2 & + & & & 2x_4 & - & 5x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Hierbij zijn $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. A is de coëfficiëntenmatrix bij dit stelsel.

(a) [3 pt] Neem $\alpha = -4$ en $\beta = 3$. Bepaal de oplossingsverzameling en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

(b) [2 pt] Neem $\alpha = -4$ en $\beta = 3$. Toon, <u>zonder</u> gebruik te maken van het resultaat van onderdeel (a), aan dat alle vectoren in de verzameling

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

oplossingen zijn van het stelsel.

(c) [2 pt] Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel oplosbaar is.

2. Gegeven is de verzameling $S = \{\, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \,\} \subset \mathbb{R}^n$ $(p \geq 1)$.

(a) [2 pt] Geef de definitie van: S is een lineair onafhankelijk stelsel in $\mathbb{R}^n$.

(b) [2 pt] Bewijs de volgende stelling uit het boek:
Als $p > n$ dan is S een lineair afhankelijk stelsel.

3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding die elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eerst roteert om de oorsprong over een hoek van $\frac{\pi}{2}$ radialen (tegen de klok in) en dan loodrecht projecteert op de lijn met vergelijking $x_2 = x_1$. A is de representatiematrix van T.

(a) [3 pt] Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) [2 pt] Bepaal alle vectoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt: $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) [2 pt] Onderzoek of T injectief is
(i) Door gebruik te maken van bovenstaande definitie van T.
(ii) Door gebruik te maken van de representatiematrix A.

Totaal: 18 punten

Mathematics C1 (Cayley)

Date : February 21, 2014
Time : 15.45 – 16.45 hrs

The solutions to the exercises need to be wellstructured and clearly formulated. Moreover, you need to motivate your answer in all cases! The use of electronic devices is not allowed.

1. Consider the following of system linear equations:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + (\alpha+1)x_4 + 5x_5 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 10x_5 = \beta \\ x_1 - x_2 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

where $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. A is the coefficient matrix of the system.

(a) [3 pt] Take $\alpha = -4$ and $\beta = 3$. Determine the solution set of the system and write it in parametric vector form.

(b) [2 pt] Take $\alpha = -4$ en $\beta = 3$. Show, without using the result of part (a), that all vectors in the set

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

are solutions of the system.

(c) [2 pt] Determine all values of α and β for which the system is consistent.

2. Consider the set $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ $(p \geq 1)$.

(a) [2 pt] Give the definition of: S is a linear independent set in $\mathbb{R}^n$.

(b) [2 pt] Prove the following theorem from the book:
If $p > n$ then S is a linear dependent set.

3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is the linear transformation that first rotates each point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ about the origin through an angle of $\frac{\pi}{2}$ radians (counterclockwise) and then projects it orthogonally onto the line with equation $x_2 = x_1$. A is the standard matrix of T.

(a) [3 pt] Show that $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) [2 pt] Determine all vectors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ for which: $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) [2 pt] Examine if T is one-to-one
(i) By using the definition of T given above.
(ii) By using the standard matrix A.

Total: 18 points