Kenmerk: EWI2016/TW/DMMP/MU/00X

Oefen Tentamen 1, Module 7, Vakcode 201400433
Discrete Structuren & Efficiënte Algoritmes

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik van zelfgeschreven formulebladen, één dubbelzijdig A4 per onderdeel, is wel toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit drie onderdelen, en is gebaseerd op de volgende, geschatte tijdsbesteding per onderdeel (slechts als indicatie):

Algorithms & Data Structures (ADS)	1h	(30 punten)
Discrete Mathematics (DW)	1h 20 min	(40 punten)
Languages & Machines (L&M)	40 min	(20 punten)

Dus in totaal 30+40+20=90 punten. Incl. de 10 gratis punten zijn het 100 punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10.

Gebruik aub per onderdeel (ADS/DW/L&M) een nieuw vel!

Algorithms & Data Structures

1. (10 punten) Beschouw het volgende sorteeralgoritme dat van een rij A van integers het segment $A[i, \ldots, j+1]$ sorteert waarbij $1 \le i \le j$:

```
def sort(A,i,j):
    if A[i]>A[j] : A[i],A[j]=A[j],A[i]
    if i+1>=j : return
    k=(j-i+1)//3
    sort(A,i,j-k)
    sort(A,i+k,j)
    sort(A,i,j-k)
```

   Gevraagd:

   (a) Bepaal de asymptotische ordegrootte van de worst-case tijdscomplexiteit van *sort* om $n > 0$ getallen te sorteren. Neem als basisoperatie een vergelijking tussen elementen in A.

   (b) Onder welke omstandigheden zou u *sort* prefereren als sorteeralgoritme boven quicksort, insertion sort, mergesort en heapsort?

2. (10 punten) Gegeven een binaire zoekboom waarbij alle keys (positieve getallen) uniek zijn. Geef een algoritme die, met als invoer een node uit de boom met key k, oplevert de node met de grootste waarde kleiner dan k (en *nil* als er niet zo'n node is).

3. (10 punten) Beschouw het volgende spel. Het spel wordt gespeeld op een bord met n bij n vierkante vakjes. Je mag een damsteen op een willekeurig vakje op de onderste rij zetten. De damsteen mag je vervolgens steeds diagonaal linksomhoog of rechtsomhoog schuiven, mits je op het bord blijft. Voor elke zet kun je een bepaald aantal positieve punten krijgen, die in een tabel gegeven zijn: vanuit vakje (i, j) rechtsomhoog levert $p(i, j, R)$ punten op, linksomhoog levert $p(i, j, L)$ punten op. Uiteindelijk mag je op een willekeurig vakje op de bovenste rij eindigen. Neem aan dat het vakje linksonder de coordinaten $(1, 1)$ heeft.

   Stel het maximaal aantal punten in vakje (i, j) is $R(i, j)$. Stel dat $1 \leq j \leq n$ en $0 \leq i \leq n+1$, met $R(0, j) = 0$ en $R(n+1, j) = 0$, en alle zetten van en naar vakjes met $i = 0$ of $i = n + 1$ leveren 0 punten op. Dan geldt de volgende recurrente betrekking:

   - $R(i, j) =$
     $max\{R(i-1, j-1) + p(i-1, j-1, R), R(i+1, j-1) + p(i+1, j-1, L)\}$
     voor $1 \leq i \leq n$, $1 < j \leq n$
   - $R(i, j) = 0$ voor $i = 0$ of $i = n + 1$ of $j = 1$

   Geef een algoritme om te bepalen hoeveel punten je maximaal kunt winnen. De complexiteit mag niet slechter zijn dan kwadratisch in n.

Discrete Mathematics

4. (5 punten) Laat zien dat de diophantische vergelijking $1000s + 444t = 2$ geen oplossing heeft voor $s, t \in \mathbb{Z}$.

5. (10 punten)

   (a) Bereken de oplossing van de recurrente betrekking

   $$a_n - 10a_{n-1} + 21a_{n-2} = 60 \cdot 3^n \quad (n \geq 2) \quad \text{met} \quad a_0 = 2 \text{ en } a_1 = -5\,.$$

   (b) We bekijken strings uit $\{0, 1, 2\}^*$. Noem a_n het aantal strings uit $\{0, 1, 2\}^*$ van lengte n die niet de substring 01 en ook niet de substring 02 bevatten. Bepaal a_1, a_2, a_3 en een recurrente betrekking voor a_n, $n \geq 4$. (Je hoeft deze betrekking niet op te lossen.)

6. (8 punten) Laat $G = (V, E)$ een enkelvoudige, ongerichte graaf zijn, met lijn lengtes $d_e \geq 0$, $e \in E$. Laat $T \subseteq E$ een minimaal opspannende boom (MST) voor G zijn. Voor een willekeurig, gegeven $s \in V$, laat verder D_s de vereniging van de lijnen van *alle* kortste (s, v)-paden zijn, voor alle $v \in V \setminus \{s\}$. Bewijs dat $T \cap D_s \neq \emptyset$.

7. (10 punten) Laat $G = (V, E)$ een bipartiete, ongerichte graaf zijn, zonder loops. Laat $|V| = n$ en $|E| = m > 1$. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende twee stellingen.

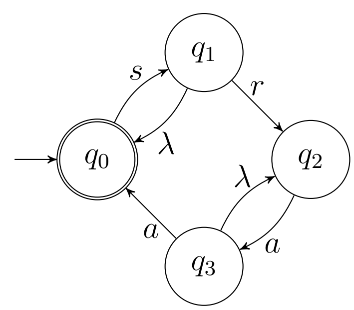
   (a) Als $m \leq 2n - 4$, dan is G planair.

   (b) Als G planair is, dan $m \leq 2n - 4$.

8. (7 punten) Wat is het aantal mogelijkheden om 50€ over drie personen te verdelen, zodat niemand minder dan 10€ krijgt, en bovendien één willekeurig iemand van de drie hooguit 15€ krijgt? Gebruik voor je berekening een genererende functie.

Languages & Machines

9. (8 punten) De automaat M hieronder beschrijft het gedrag van een communicatie-protocol over een onbetrouwbaar kanaal, als een NFA-λ: De zender stuurt een bericht (s), dat bij de ontvanger aankomt (r), tenzij het spontaan verloren gaat. De ontvanger bevestigt het bericht (a); deze bevestiging komt aan bij de zender (a), of gaat spontaan verloren.



   (a) Transformeer automaat M stapsgewijs naar een reguliere expressie.

   (b) Geef de λ-closure en de input-transitie functie van M in een tabel.

   (c) Transformeer automaat M systematisch naar een (onvolledige) DFA.

10. (12 punten) We introduceren de volgende 5 talen:

- de taal $L_1 := \{a^n\, a^{2n} \mid n \geq 0\}$
- de taal $L_2 := \{a^n\, b\, a^{2n} \mid n \geq 0\}$
- de taal L_3 van alle woorden over $\Sigma = \{a, b, c\}$, met hooguit 4 symbolen tussen elke twee opeenvolgende a's, die echter de substring $abcba$ *niet* bevatten.
- L_4 is een (willekeurige) niet-reguliere taal.
- L_5 is een (willekeurige) eindige taal.

Geef aan of de volgende talen regulier zijn of niet. Toon je antwoord aan door een constructie of een bewijs te geven.

(a) taal L_1

(b) taal L_2

(c) taal L_3

(d) taal $L_4 \cup L_5$