Proeftoets voor Kansrekening voor INF en BIT in 2013/2014 (module 4-201300180).
Tijdsduur: ca. 2 uur.

Deze toets bestaat uit 5 opgaven, het formuleblad en de tabellen voor de Poisson en standaardnormale verdeling. Een gewone, niet-programmeerbare rekenmachine (geen GR) is toegestaan. Motiveer je antwoorden kort en duidelijk.

1. Van twee gebeurtenissen A en B weten we dat $P(A) = 0.2$ en $P(B) = 0.5$.
Bereken de kans $P(A \cup B)$ in de volgende gevallen:

a. Als A en B elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn.
b. Als A en B onderling onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
c. Als $P(A|B) = 0.3$.

2. Op een bepaald punt langs de Rijksweg controleert de politie of de passerende auto's te hard rijden. Indien de snelheidslimiet met 30 km wordt overschreden, wordt de bestuurder aangehouden en de auto in beslag genomen. Zij X het aantal in beslag genomen auto's gedurende de controle waarbij er n auto's passeren en p de kans is dat een passerende auto minstens 30 km te hard rijdt.
Bereken of benader de volgende kansen:

a. $P(X > 0)$ voor $n = 10$ en $p = 0.2$.
b. $P(X \geq 5)$ voor $n = 250$ en $p = 0.01$.
c. $P(X < 30)$ voor $n = 400$ en $p = 0.1$.

3. Een kleine fabriek werkt met een ochtendploeg en een avondploeg. Op basis van jarenlange statistieken is de simultane kansverdeling van $\boldsymbol{X}$ = "het aantal afwezigen bij de ochtendploeg" en $\boldsymbol{Y}$ = "het aantal afwezigen bij de avondploeg" bepaald.
De kansen $\boldsymbol{P(X = x \text{ en } Y = y)}$ zijn in de volgende tabel gegeven:

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.20	0.10	0
1	0.10	0.15	0.15
2	0	0.15	0.15

a. Bepaal $E(X)$ en $var(X)$.
b. Bereken de correlatiecoëfficiënt en verklaar wat deze zegt over het verband tussen X en Y.
c. Bereken $E(X+Y)$ en $var(X+Y)$.
d. Bepaal de kansverdeling van Y, gegeven $X = 0$, en $E(Y|X = 0)$.

4. Voor een loket wacht een rij mensen om geholpen te worden. We nemen aan dat de bedieningsduren $X_1, X_2, \ldots$ van de mensen in de rij onderling onafhankelijk en alle exponentieel verdeeld zijn, met een verwachte bedieningsduur van 2 minuten.

a. Bereken $P(X_1 > 3)$ en $P(X_1 > 5 \mid X_1 > 2)$.
b. Bereken $P(X_1 > 3 \text{ en } X_2 > 3)$.
c. Bepaal de kansdichtheid van $X_1 + X_2$ en bereken $P(X_1 + X_2 > 3)$.
d. Bereken $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} > 90)$.

e. Indien we de exponentiële verdeling van de bedieningsduren X_i willen simuleren, kunnen we gebruik maken van een random getal U tussen 0 en 1 (dus U is uniform verdeeld op (0, 1)). Toon aan dat in dit geval $X = -2\ln(U)$ het gewenste resultaat oplevert.

5. Het rendement (in % per jaar) op een aandelenfonds wordt vaak gemodelleerd als een normaal verdeelde stochastische variabele X met een verwacht jaarrendement μ en een variantie σ^2. Voor een bepaald type fondsen wordt ten aanzien van het risicoprofiel verondersteld dat de verwachting μ = 8 en standaardafwijking σ = 10.

a. Bereken de kans op een negatief rendement.
b. Bereken het 99$^{\text{ste}}$ percentiel *c* van de rendementen: bepaal *c* zodat $P(X \geq c) = 0.01$

We hebben nu voor zo'n fonds de beschikking over een aselecte steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ van 10 van deze jaarrendementen, met als gemiddelde $\overline{X}$.
c. Bereken de kans op een negatief gemiddeld rendement, $P(\overline{X} \leq 0)$

Normering:

1			**2**			**3**				**4**					**5**			**Totaal**
a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	
1	1	2	2	2	3	2	3	3	3	2	2	3	3	3	2	2	3	42

Tentamencijfer = 1 + 9×(aantal punten)/42

Formuleblad Kansrekening voor INF en BIT t.b.v. toetsen

Verdeling	$E(X)$	$var(X)$
Geometrisch	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hypergeometrisch	$n \cdot \frac{r}{N}$	$n \cdot \frac{r}{N} \cdot \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$
Poisson $P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$	μ	μ
Exponentieel	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Uniform op (a, b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \sum_{i \neq j}\sum cov(X_i, X_j)$$