Mathematics C1 (Cayley)

Date : March 28, 2014
Time : 15.45 – 16.45 hrs

The solutions to the exercises need to be wellstructured and clearly formulated. Moreover, you need to motivate your answer in all cases! The use of electronic devices is not allowed.

1. Consider the matrix A and the vector $\mathbf{v}$ given by:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -6 & -6 & -8 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) [1 pt] Show that $\mathbf{v} \in \text{Nul } A$.

(b) [2 pt] Determine a basis $\mathcal{B}$ for Nul A.

(c) [1 pt] Determine $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

2. Let A be a 3×5-matrix with Col $A = \mathbb{R}^3$ and let B be a 5×3-matrix with rank $B = 2$. What are the consequences of these facts for (include an argumentation!):

(a) [1 pt] The dimensions of Nul A and Nul B?

(b) [2 pt] The number of solutions of the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$)?

(c) [2 pt] Show that the matrix product AB is not invertible.

3. Consider the matrix A given by: $A = \begin{bmatrix} \alpha-2 & 2\alpha-1 & 0 \\ \alpha+1 & 1 & \alpha-1 \\ 1 & \alpha+2 & 0 \end{bmatrix}$, where $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [3 pt] Show that: $\det A = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \{-1, 1, 3\}$.

(b) [1 pt] For which value(s) of α is A invertible?

(c) [3 pt] Take $\alpha = 0$. Determine A^{-1} if it exists.

(d) [2 pt] Let P be the parallelepipid spanned by the vectors

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (these are the columns of A, if $\alpha = 0$).

Let T be the linear transformation determined by the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (this is the matrix A, if $\alpha = 2$).
Determine the volume of the T-image of P.

Total: 18 points

Mathematics C1 (Cayley)

Datum : 28 maart 2014
Tijd : 15.45 – 16.45 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.
Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

1. De matrix A en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -6 & -6 & -8 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) [1 pt] Toon aan dat $\mathbf{v} \in \text{Nul } A$.

(b) [2 pt] Bepaal een basis $\mathcal{B}$ voor Nul A.

(c) [1 pt] Bepaal $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

2. Gegeven is een 3×5-matrix A met Col $A = \mathbb{R}^3$ en een 5×3-matrix B met rank $B = 2$.
Wat zijn de gevolgen van deze gegevens voor (geef ook argumentatie!):

(a) [1 pt] De dimensies van Nul A en Nul B?

(b) [2 pt] Het aantal oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$)?

(c) [2 pt] Toon aan dat de productmatrix AB niet inverteerbaar is.

3. De matrix A is gegeven door: $A = \begin{bmatrix} \alpha - 2 & 2\alpha - 1 & 0 \\ \alpha + 1 & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha + 2 & 0 \end{bmatrix}$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [3 pt] Toon aan dat: $\det A = 0 \iff \alpha \in \{-1, 1, 3\}$.

(b) [1 pt] Voor welke waarde(n) van α is A inverteerbaar?

(c) [3 pt] Neem $\alpha = 0$. Bepaal A^{-1} als deze bestaat.

(d) [2 pt] Laat P het parallellepipedum zijn dat wordt opgespannen door de vectoren

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (dit zijn de kolommen van A, als $\alpha = 0$).

Laat T de lineaire transformatie zijn die door de matrix $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ wordt vastgelegd (dit is de matrix A, als $\alpha = 2$).
Bepaal het volume van het T-beeld van P.

Totaal: 18 punten