

First read these instructions carefully:

This test contains 9 exercises. The complete solutions of Exercises 3, 4, 6 and 8 must be accurately written down on a separate sheet, including calculations and argumentation. For the other exercises you are only required to fill in the final answers on the answer sheet at the end of this test. You must hand in this answer sheet as well as your hand written solutions to Exercises 3, 4, 6 and 8.

The use of electronic devices is not allowed.

1. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine A^{-1} .

2. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

The matrix A given by:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

has eigenvalues in $-1, 0$ and 1 . Find an invertible matrix P and a diagonal matrix D such that

$$P^{-1}AP = D.$$

3. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Consider the following three vectors:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determine a basis for $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Consider the matrices A and B given by:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

Find all vectors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ for which:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{and} \quad B\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

5. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

Given is that two matrices A and B have the same reduced echelon form. Indicate for each of the following four statements whether they are consequences of the fact that the reduced echelon form of A and B are the same:

- 1) $\text{Null } A = \text{Null } B$,
- 2) $\text{Col } A = \text{Col } B$,
- 3) A invertible implies that B is invertible,
- 4) $\det A = \det B$.

6. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Given are two matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ where the columns of A are given by $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$ while the columns of B are given by $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$. We have

$$\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_3 \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_3 = 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$$

and $\det A = 3$. Determine $\det B$.

7. *Fill in your final answers to this exercise on the supplied answer sheet!*

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is the linear transformation that rotates each point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ counter clockwise over 120 degrees. Determine the representation matrix of T .

8. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Assume that the solution set of the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at least two solutions, i.e. we have $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ with $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ such that $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ and $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$.

Show that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has an infinite number of solutions.

9. *Fill in your final answer to this exercise on the supplied answer sheet!*

Given is a matrix A parameterized with a constant α :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha - 1 \\ 2\alpha - 5 & 6 - 2\alpha & 0 \\ \alpha - 3 & 4 - \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Determine all $\alpha \in \mathbb{R}$ for which A is invertible.

For the exercises the following number of points can be obtained:

Exercise 1.	3 points	Exercise 2.	3 points	Exercise 3.	3 points
Exercise 4.	3 points	Exercise 5.	3 points	Exercise 6.	3 points
Exercise 7.	3 points	Exercise 8.	3 points	Exercise 9.	3 points

The grade is determined by dividing the total number of points by 3 and adding 1.

Lees eerst zorgvuldig deze instructies:

Deze toets bestaat uit 9 opgaven. De volledige uitwerkingen van opgaven 3, 4, 6 en 8 moeten op apart papier worden geschreven, inclusief berekeningen en argumentatie. Voor de overige opgaven volstaat het uitsluitend de eindantwoorden/uitkomsten te noteren op het antwoordenblad aan het eind van deze toets. U dient zowel dit antwoordenblad als de handgeschreven uitwerkingen van opgaven 3, 4, 6 en 8 in te leveren.
Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.

1. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal A^{-1} .

2. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

De matrix A , gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

heeft eigenwaarden in $-1, 0$ en 1 . Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat:

$$P^{-1}AP = D.$$

3. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

Gegeven zijn de volgende drie vectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een basis voor $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

De matrices A en B worden gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

Bepaal alle vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ zodanig dat:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{en} \quad B\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

5. Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!

Gegeven is dat twee matrices A en B dezelfde gereduceerde echelon vorm hebben. Geef voor elk van de volgende vier beweringen aan of die een gevolg zijn van het feit dat de gereduceerde echelon vorm van A en B gelijk zijn:

- 1) $\text{Null } A = \text{Null } B$,
- 2) $\text{Col } A = \text{Col } B$,
- 3) A inverteerbaar impliceert dat B inverteerbaar is,
- 4) $\det A = \det B$.

6. Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!

Gegeven zijn twee matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ waarbij A kolommen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$ heeft terwijl de kolommen van B gegeven worden door $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$. We hebben

$$\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_3 \quad \text{en} \quad \mathbf{b}_3 = 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$$

en $\det A = 3$. Bepaal $\det B$.

7. Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding die elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 120 graden roteert tegen de klok in. Bepaal de representatie matrix van T .

8. Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!

Neem aan dat de oplossingsverzameling van het systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenminste twee oplossing heeft, dat wil zeggen we hebben $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_2$ met $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ zodanig dat $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ en $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$.

Toon aan dat het systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een oneindig aantal oplossingen heeft.

9. Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!

Gegeven is een matrix A geparameteriseerd door een constante α :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha - 1 \\ 2\alpha - 5 & 6 - 2\alpha & 0 \\ \alpha - 3 & 4 - \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Bepaal alle $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor A inverteerbaar is.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	3 punten	Vraagstuk	2.	3 punten	Vraagstuk	3.	3 punten
Vraagstuk	4.	3 punten	Vraagstuk	5.	3 punten	Vraagstuk	6.	3 punten
Vraagstuk	7.	3 punten	Vraagstuk	8.	3 punten	Vraagstuk	9.	3 punten

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 3 punten op te tellen en door 3 te delen.

Answer sheet

Antwoordenblad

Legibly fill in your answers in the corresponding box
Schrijf je antwoord leesbaar in de bijbehorende box

Linear Algebra April 18, 2019

Name/Naam:

Programme/Opleiding:

1.

2.

5.

7.

9.