

First read these instructions carefully:

This test contains 9 exercises. The complete solutions of Exercises 3, 5, 6 and 7 must be accurately written down on a separate sheet, including calculations and argumentation. For the other exercises you are only required to fill in the final answers on the answer sheet at the end of this test. You must hand in this answer sheet as well as your hand written solutions to Exercises 3, 5, 6 and 7.

The use of electronic devices is not allowed.

1. *Fill in your final answer to this exercise on the separate answer sheet!*

Consider the function f given by $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{-x}$, where α , β and γ are unknown constants.

Determine α , β and γ if it is given that

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 5, \quad f''(0) = 5.$$

2. *Fill in your final answers to this exercise on the separate answer sheet!*

The matrix A is given by:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determine $\det A$.
- b) A has eigenvalue 1 (you don't have to prove this).
Determine the corresponding eigenspace.
- c) Determine the other (possibly complex) eigenvalue(s) of A .

3. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Consider the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Verify whether $A^3 B^5 C^7$ is invertible.

4. *Fill in your final answer to this exercise on the separate answer sheet!*

Given is the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine Null A .
- b) Determine Col A .

5. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Consider a vector space and two vectors in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{T} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determine whether $\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$ is a basis for $\mathcal{T}$.

6. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Determine two different echelon forms for the following matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. *Use separate sheet and include clear argumentation and calculation!*

Let T be an arbitrary linear transformation from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$.

- a) Assume that T is one-to-one. Show that T^2 is one-to-one
- b) Assume that T^2 is one-to-one. Show that T is one-to-one.

8. *Fill in your final answer to this exercise on the separate answer sheet!*

Given are four vectors in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In this case $\mathcal{T} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$. Determine $[\mathbf{v}_4]_{\mathcal{T}}$.

9. *Fill in your final answer to this exercise on the separate answer sheet!*

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a linear transformation such that:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Determine the representation matrix of T .

For the exercises the following number of points can be obtained:

Exercise 1.	3 points	Exercise 2.	2+2+2 points	Exercise 3.	3 points
Exercise 4.	2+2 points	Exercise 5.	5 points	Exercise 6.	3 points
Exercise 7.	3+3 points	Exercise 8.	3 points	Exercise 9.	3 points

The grade is determined by dividing the total number of points by 4 and adding 1.

Lees eerst zorgvuldig deze instructies:

Deze toets bestaat uit 9 opgaven. De volledige uitwerkingen van opgaven 3, 5, 6 en 7 moeten op apart papier worden geschreven, inclusief berekeningen en argumentatie. Voor de overige opgaven volstaat het uitsluitend de eindantwoorden/uitkomsten te noteren op het antwoordenblad aan het eind van deze toets. U dient zowel dit antwoordenblad als de handgeschreven uitwerkingen van opgaven 3, 5, 6 en 7 in te leveren. Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.

1. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

Gegeven is de functie f met $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{-x}$, waarbij α , β en γ onbekende constanten zijn.

Bepaal α , β en γ als gegeven is dat:

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 5, \quad f''(0) = 5.$$

2. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

De matrix A is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Bepaal $\det A$.
- b) A heeft eigenwaarde 1 (dit hoeft je niet aan te tonen).
Bepaal de bijbehorende eigenruimte.
- c) Bepaal de andere (mogelijk complexe) eigenwaarde(n) van A .

3. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

De volgende matrices zijn gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ga na of de matrix $A^3 B^5 C^7$ inverteerbaar is.

4. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

Gegeven is de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal $\text{Null } A$.
- b) Bepaal $\text{Col } A$.

5. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

Gegeven is een vectorruimte en twee vectoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{T} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ga na of $\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

6. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

Bepaal twee verschillende echelon vormen voor de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. *Gebruik los tentamenpapier en beargumenteer uw antwoord en de berekeningen!*

T is een willekeurige lineaire transformatie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$.

a) Neem aan dat T één-op-één is. Toon aan dat T^2 één-op-één is.

b) Neem aan dat T^2 één-op-één is. Toon aan dat T één-op-één is.

8. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

Gegeven zijn vier vectoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In dit geval is $\mathcal{T} = \text{Span} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ een basis voor $\mathbb{R}^3$. Bepaal $[\mathbf{v}_4]_{\mathcal{T}}$.

9. *Vul uw antwoord in op het antwoordenblad aan het eind van deze toets!*

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is een lineaire transformatie zodanig dat:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bepaal de representatiematrix van T .

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	3 punten	Vraagstuk	2.	2+2+2 punten	Vraagstuk	3.	3 points
Vraagstuk	4.	2+2 punten	Vraagstuk	5.	5 punten	Vraagstuk	6.	3 points
Vraagstuk	7.	3+3 punten	Vraagstuk	8.	3 punten	Vraagstuk	9.	3 points

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 4 punten op te tellen en door 4 te delen.

Answer sheet

Antwoordenblad

Legibly fill in your answers in the corresponding box
Schrijf je antwoord leesbaar in de bijbehorende box

Linear Algebra March 29, 2019

Name/Naam:

Programme/Opleiding:

1.

--

2. a)

--

b)

--

c)

--

4. a)

--

b)

--

8.

--

9.

--