**UNIVERSITEIT TWENTE**
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

**Tentamen Mathematics C1 Cayley op vrijdag 31 maart 2017, 13:45-15:45 uur**

---

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

Er is geen formuleblad toegestaan en ook een rekenmachine is NIET toegestaan.

---

1. Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 6x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Dit stelsel kan ook geschreven worden als $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ met $A_1$ de coëfficientenmatrix en $\mathbf{b}_1$ de vector corresponderend met de rechterkant van het stelsel.

a) Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

b) Bepaal $\operatorname{Null} A_1$.

Gegeven is een tweede stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Dit tweede stelsel kan ook geschreven worden als $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ met $A_2$ de coëfficientenmatrix en $\mathbf{b}_2$ de vector corresponderend met de rechterkant van dit tweede stelsel.

c) Bepaal alle vectoren $\mathbf{x}$ die voldoen aan zowel $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ als $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

2. De matrices $A$ en $B$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4-2\alpha & \alpha-1 \\ \alpha & 2-\alpha & \alpha-1 \\ -2\alpha & 2-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal alle $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor $A$ inverteerbaar is.

b) Neem $\alpha = -1$. Bepaal $A^{-1}$.

c) Neem $\alpha = -1$. Bepaal een matrix $C$ zodanig dat $CA = B$.

3. Gegeven zijn drie vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ zodanig dat:

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

Toon aan dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineair afhankelijk is.

z.o.z.

4. De matrix $A$ is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

   a) Laat zien dat 2 een eigenwaarde is van de matrix $A$.
   b) Bepaal de eigenwaarden van $A$ en de bijbehorende eigenruimten.
   c) Bepaal de eigenwaarden van $A^5$ en de bijbehorende eigenruimten.

5. Gegeven is dat de eigenwaarden van de matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeven worden door 1, 0 en $-1$ met, respectievelijk, eigenvectoren $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ en $\mathbf{p}_3$:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Bepaal de matrix $A$.

6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding die elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eerst roteert over 45 graden (tegen de klok in) en dan schaalt met een factor $\sqrt{2}$.

   a) Bepaal de representatie matrix van $T$.
   b) Bepaal de representatie matrix van $T^{16}$. Laat duidelijk zien hoe u aan uw antwoord bent gekomen.

7. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{v}_4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Bepaal een basis $\mathcal{B}$ voor $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
   b) Bepaal $[\mathbf{v}_5]_{\mathcal{B}}$ voor $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

8. Gegeven zijn de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Bepaal

$$\det(B^{\mathrm{T}} A^{-1} B A)$$

---

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vraagstuk | 1. | 5 punten | Vraagstuk | 2. | 6 punten | Vraagstuk | 3. | 4 punten |
| Vraagstuk | 4. | 5 punten | Vraagstuk | 5. | 4 punten | Vraagstuk | 6. | 4 punten |
| Vraagstuk | 7. | 4 punten | Vraagstuk | 8. | 4 punten | | | |

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 4 punten op te tellen en door 4 te delen.

UNIVERSITY OF TWENTE

Department of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science

**Exam Mathematics C1 Cayley on Friday March 31, 2017, 13.45 – 15.45 hours.**

---

The solutions of the exercises should be clearly formulated. Moreover, in all cases you should motivate your answer!

---

You are **not** allowed to use a formula sheet and you are **not** allowed to use a calculator.

---

1. Given is the following linear system of equations:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 6x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

This system can also be written as $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ where $A_1$ is the coefficient matrix and $\mathbf{b}_1$ is the right-hand side of this system.

a) Determine the solution set of this system ans write it in parametric vector form.

b) Determine $\operatorname{Null} A_1$.

Given is a second linear system of equations:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

This second system can also be written as $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ where $A_2$ is the coefficient matrix and $\mathbf{b}_2$ is the right-hand side of this second system.

c) Determine all vectors $\mathbf{x}$ which satisfy $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ as well as $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

2. The matrices $A$ and $B$ are given by:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4-2\alpha & \alpha-1 \\ \alpha & 2-\alpha & \alpha-1 \\ -2\alpha & 2-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine all $\alpha \in \mathbb{R}$ for which $A$ is invertible.

b) Take $\alpha = -1$. Determine $A^{-1}$.

c) Take $\alpha = -1$. Determine a matrix $C$ such that $CA = B$.

3. Given are three vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}_3$ such that:

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

Show that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is linearly dependent.

see reverse side

4. The matrix $A$ is given by:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

   a) Show that 2 is an eigenvalue of the matrix $A$.
   b) Determine the eigenvalues of $A$ and the corresponding eigenspaces.
   c) Determine the eigenvalues of $A^5$ and the corresponding eigenspaces.

5. Given is that the eigenvalues of the matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ are given by 1, 0 and $-1$ with eigenvectors $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ and $\mathbf{p}_3$, respectively:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Determine the matrix $A$.

6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is the linear transformation which first rotates each point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ over 45 degrees (counter clockwise) and then scales the result by $\sqrt{2}$.

   a) Determine the representation matrix of $T$.
   b) Determine the representation matrix of $T^{16}$. Clearly indicate how you obtained the result!

7. Given are the vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ and $\mathbf{v}_4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Determine a basis $\mathcal{B}$ for Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
   b) Determine $[\mathbf{v}_5]_{\mathcal{B}}$ for $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

8. Given are the matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determine

$$\det(B^{\mathrm{T}} A^{-1} B A)$$

For the exercises the following number of points can be obtained:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Exercise | 1. | 5 points | Exercise | 2. | 6 points | Exercise | 3. | 4 points |
| Exercise | 4. | 5 points | Exercise | 5. | 4 points | Exercise | 6. | 4 points |
| Exercise | 7. | 4 points | Exercise | 8. | 4 points | | | |

The grade is determined by adding 4 points to the total number of points obtained and dividing by 4.