

Mathematics C1 (Cayley)

Datum : 20 februari 2015
Tijd : 13.45 – 14.45 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.

1. De matrix A en de vectoren \mathbf{b} en \mathbf{p} zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 8 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) [1 pt] Toon aan dat \mathbf{p} een oplossing is van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(b) [2 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en schrijf deze in parametrische vectorvorm.
(c) [2 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en schrijf deze in parametrische vectorvorm.
(d) [2 pt] Bepaal alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ waarvoor $x_2 = 0$.
(e) [1 pt] Schrijf, indien mogelijk, \mathbf{b} als een lineaire combinatie van de kolommen van A .

2. (a) [2 pt] Laat $A = \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$. Bepaal alle gehele getallen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ waarvoor $A^2 = I_2$.

- (b) [2 pt] Bepaal de inverse van de matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, indien deze bestaat.

- (c) [2 pt] Laat $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een matrix zijn en laat $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zo dat het stelsel $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ strijdig (inconsistent) is. Is het mogelijk dat er een $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ bestaat waarvoor het stelsel $C\mathbf{x} = \mathbf{c}$ precies één oplossing heeft? Verklaar uw antwoord door gebruik te maken van de standaardrijvorm (*echelon form*) van C .

3. Laat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een inverteerbare matrix zijn.

- (a) [2 pt] Toon aan dat $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$ een oplossing is van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- (b) [2 pt] Toon aan dat als \mathbf{y} een oplossing is van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dan moet $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Totaal: 18 punten