Mathematics C1 (Cayley)

Datum : 15 april 2016
Tijd : 13.45 – 15.45 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.
Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

1. De matrix A en de vector **b** zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ \alpha & -6 & 3\alpha - 2 \\ -2 & 3 & 2\alpha - 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3\alpha + 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [2 pt] Laat zien dat een echelon form van de aangevulde matrix van het lineaire stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gelijk is aan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha - 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 5\alpha - 14 & \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Geef bij elke stap aan welke elementaire rij-operatie u daar uitvoert.

(b) [2 pt] Bepaal alle waarde van α waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(i) geen oplossingen heeft.

(ii) oneindig veel oplossingen heeft.

(iii) precies één oplossing heeft.

(c) [2 pt] Neem $\alpha = 2$. Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

2. De matrix A is gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

De kolommen van A worden aangegeven door respectivelijk $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$.

(a) [2 pt] Bepaal de inverse van de matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$.

(b) [2 pt] Verder zijn gegeven de matrices $B \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ en $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Bepaal k, ℓ, m en n zo dat zowel het product ABC als het product CBA is gedefinieerd.

3. The vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ are given by:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2\alpha \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ \alpha - 7 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha + 1 \\ 3 \\ \alpha + 3 \end{bmatrix},$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [3 pt] Show that the system $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is linearly independent if and only if $\alpha \notin \{-\frac{5}{2}, 1\}$.

(b) [2 pt] Determine all values of α for which: $\mathbf{v}_1 \in \text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(c) [2 pt] Take $\alpha = 1$. Determine a basis for the linear subspace $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. [2 pt]
Consider $n \times n$-matrices A and B.
Show that if AB is invertible, then both A and B are invertible.

5. [3 pt]
Determine the area of the triangle with vertices $(3, 1)$, $(-1, 4)$ and $(8, -1)$.

6. The matrix A is given by: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$

Furthermore, it is given that $\lambda = 2$ is an eigenvalue of A.

(a) [3 pt] Determine all eigenvalues of A.

(b) [2 pt] Determine the eigenspace of A corresponding to eigenvalue 2.

7. [4 pt]
Let $\mathbf{x}$ be an eigenvector of a matrix A, corresponding to eigenvalue λ.
Prove, with mathematical induction to k, that for all $k \geq 1$: $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.

8. Consider a linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfying

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(a) [3 pt] Determine the representation matrix of T.

(b) [2 pt] Determine all vectors that are mapped onto $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ by T.

If you did not find the answer to part (a) you may use the representation matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Total: 36 points