Matrixalgebra (het rekenen met matrices)

Definitie 1.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{is een } (m \times n)\textit{-matrix.}$$

Hierbij is m het aantal **rijen** *van A en n het aantal* **kolommen**.
$(m\times n)$ noemt men de **afmeting(en)** *van de matrix A. We noteren vaak kortweg : $A = (a_{ij})$, waarbij a_{ij} staat voor het* **element** *van A in de i^e rij en in de j^e kolom.*
De elementen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ heten wel de **diagonaalelementen** *van A. Deze vormen de zogenaamde* **hoofddiagonaal** *van de matrix A.*
Een **diagonaalmatrix** *is een vierkante matrix (dus : $m = n$) waarvan alle niet-diagonaalelementen nul zijn.*
Een matrix waarvan alle elementen nul zijn heet een **nulmatrix**. *Notatie : O.*

Het (coördinaatsgewijs) rekenen met vectoren kan men eenvoudig generaliseren naar matrices. Twee matrices noemen we **gelijk** als hun afmetingen gelijk zijn en tevens de overeenkomstige elementen gelijk zijn.
Matrices met dezelfde afmetingen kunnen elementsgewijs bij elkaar worden opgeteld en van elkaar worden afgetrokken. Ook de **scalaire vermenigvuldiging** (vermenigvuldiging met een getal) gaat elementsgewijs.

Voorbeeld 1. Als $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Op deze manier kunnen lineaire combinaties gevormd worden, zoals :

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 8 & 5 \\ -6 & -23 \end{pmatrix}.$$

We hebben nu de volgende rekenregels :

Stelling 1. *Als A, B en C matrices zijn met dezelfde afmetingen en r en s zijn reële getallen, dan geldt :*

1.	$A + B = B + A$	*4.*	$r(A + B) = rA + rB$
2.	$(A + B) + C = A + (B + C)$	*5.*	$(r + s)A = rA + sA$
3.	$A + O = A$	*6.*	$r(sA) = (rs)A$

De matrixvermenigvuldiging

Onder bepaalde voorwaarden kunnen we matrices ook met elkaar vermenigvuldigen :

Definitie 2. *Als A een $(m \times n)$-matrix is en $B = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \ldots & \underline{b}_p \end{pmatrix}$ een $(n \times p)$-matrix, dan geldt :*

$$AB = A \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \ldots & \underline{b}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underline{b}_1 & \ldots & A\underline{b}_p \end{pmatrix}.$$

Merk op dat dit een natuurlijke uitbreiding is van het matrix-vectorproduct.

Voorbeeld 2. Als $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 7 & 16 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Immers, voor de eerste kolom geldt

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-6 \\ -2+9 \\ 0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -15 \end{pmatrix}$$

en voor de tweede kolom

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 \\ 4+12 \\ 0-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Dit is de kolomgewijze benadering, maar evenals bij het matrix-vectorproduct kunnen we dit ook rijgewijs berekenen :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 & 0 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 7 & 16 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Opmerking. Een matrixproduct AB is dus alleen gedefinieerd als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B. In dat geval noemt men A en B **vermenigvuldigbaar**. Als A een $(m \times n)$-matrix is en B een $(n \times p)$-matrix, dan is AB dus gedefinieerd en is AB een $(m \times p)$-matrix.

In voorbeeld 2 is dus AB wel, maar BA niet gedefinieerd !

Voorbeeld 3. Als $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 3 \\ 7 & 16 & 6 \\ -15 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zowel AB als BA zijn gedefinieerd, maar AB is een (3×3)-matrix en BA is een (2×2)-matrix. Dus : $AB \neq BA$.

Voorbeeld 4. Als $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 18 & -17 \end{pmatrix}.$$

Zowel AB als BA zijn gedefinieerd, beide zijn (2×2)-matrices, maar $AB \neq BA$.

Voorbeeld 5. Als $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Nu geldt $AB = BA$. Men zegt dan dat de matrices A en B **commuteren**.

Voorbeeld 6. Als $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Dus : $BA = O$, terwijl $A \neq O$ en $B \neq O$.

Voorbeeld 7. Als $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dit toont aan dat we delen door een matrix <u>niet</u> kunnen definiëren.

In het algemeen geldt dus :	1.	$AB \neq BA$		
	2.	$AB = O$	$\not\Longrightarrow$	$A = O$ of $B = O$
	3.	$AB = AC$	$\not\Longrightarrow$	$B = C$.

Wel gelden de volgende rekenregels :

Stelling 2. *Als A een $(m \times n)$-matrix is en B en C zijn matrices met afmetingen zodat de onderstaande matrixproducten gedefinieerd zijn, dan geldt :*

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *voor iedere* $\lambda \in \mathbb{R}$
5. $I_m A = A$ *met* I_m *de* $(m \times m)$*-eenheidsmatrix*
6. $AI_n = A$ *met* I_n *de* $(n \times n)$*-eenheidsmatrix.*

Een **vierkante** matrix A kan met zichzelf vermenigvuldigd worden. Het product heeft dezelfde afmetingen als A. In dat geval kunnen we dus machten van een matrix definiëren :

Definitie 3. *Als A een $(n \times n)$-matrix is, dan geldt :* $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$ *en algemeen* $A^k = A \cdot A^{k-1}$ *voor* $k = 2, 3, 4, \ldots$. *Dit geldt ook voor* $k = 1$ *als we definiëren dat :* $A^0 = I_n$.

Voorbeeld 8. Als $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

en

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}.$$

Tenslotte definiëren we nog het begrip **transponeren**. Onder transponeren van een matrix A verstaan we het verwisselen van de rijen en de kolommen. Het resultaat noemen we de **getransponeerde** van de matrix A. Notatie : A^T. Dus : als $A = (a_{ij})$, dan geldt $A^T = (a_{ji})$.

Voorbeeld 9. Als $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, dan is $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Hiervoor gelden de volgende rekenregels :

Stelling 3. *Als A en B matrices zijn zodat de onderstaande sommen en matrixproducten gedefinieerd zijn, dan geldt :*

1.	$(A^T)^T = A$	*3.*	$(\lambda A)^T = \lambda A^T$ *voor iedere* $\lambda \in \mathbb{R}$
2.	$(A+B)^T = A^T + B^T$	*4.*	$(AB)^T = B^T A^T$.

Voorbeeld 10. Stel dat $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.

Vraag 1 : Bepaal een matrix X zodat $AX = B$.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vraag 2 : Bepaal een matrix Y zodat $YA = B$.

Merk op, dat : $YA = B \iff (YA)^T = B^T \iff A^T Y^T = B^T$.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $Y^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ en dus dat $Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$.

De inverse van een matrix

Definitie 4. *Een $(n \times n)$-matrix A heet* **inverteerbaar** *als er een $(n \times n)$-matrix C bestaat zodat $AC = I$ én $CA = I$. Zo'n matrix C heet een* **inverse** *van A.*

Stelling 4. *Als een $(n \times n)$-matrix A inverteerbaar is, dan bestaat er maar één inverse.*

Bewijs. Stel dat $AC = I = CA$ en $AB = I = BA$, dan volgt

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Als een matrix A inverteerbaar is, dan kunnen we dus spreken over de inverse van A.
Notatie : A^{-1}.

Een niet-inverteerbare matrix wordt ook wel **singulier** genoemd en een inverteerbare matrix **niet-singulier** (of : **regulier**).

Stelling 5. *Als* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, dan geldt : Als* $ad - bc \neq 0$*, dan is* A *inverteerbaar en*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Als $ad - bc = 0$*, dan is* A *niet inverteerbaar.*

Het getal $ad - bc$ heet de **determinant** van de matrix A : $\boxed{\det A := ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

Voorbeeld 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \implies \det A = 2 - 1 = 1 \neq 0.$

Dus : A is inverteerbaar en $A^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Stelling 6. *Als de* $(n \times n)$*-matrix* A *inverteerbaar is, dan heeft de matrixvergelijking* $A\underline{x} = \underline{b}$ *precies één oplossing voor iedere* $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$*. Die oplossing is dan* $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$*.*

Er gelden de volgende rekenregels :

Stelling 7. *Als* A *en* B *inverteerbare* $(n \times n)$*-matrices zijn, dan geldt :*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

De laatste rekenregel kan eenvoudig gegeneraliseerd worden tot : een product van inverteerbare $(n \times n)$-matrices is inverteerbaar en de inverse is het product van de inversen in omgekeerde volgorde.

Stelling 8. *Als* A *een* <u>*vierkante*</u> *matrix is en* C *is een matrix zodat* $AC = I$*, dan geldt ook dat* $CA = I$*.*

Het bewijs van deze stelling is niet zo eenvoudig (geen tentamenstof), maar het resultaat bespaart veel werk. Om na te gaan of een matrix A inverteerbaar is hoeven we 'slechts' te zoeken naar een matrix X zodat $AX = I$. Als zo'n matrix X bestaat, dan is dat de inverse van A en als zo'n matrix X niet bestaat, dan is A niet inverteerbaar.

Algoritme : $\boxed{(A \mid I) \sim \left(I \mid A^{-1}\right)}$

Voorbeeld 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. <u>Vraag :</u> Is A inverteerbaar ? Zo ja, wat is dan A^{-1} ?

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Dus : A is inverteerbaar en $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld 12. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 3 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Vraag :</u> Is A inverteerbaar ? Zo ja, wat is dan A^{-1} ?

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Dus : A is inverteerbaar en $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Deelruimten van $\mathbb{R}^n$

Definitie 5. *Een deelverzameling H van $\mathbb{R}^n$ heet een* **deelruimte** *van $\mathbb{R}^n$ als :*

1. $\underline{o} \in H$
2. $\underline{u} + \underline{v} \in H$ *voor alle* $\underline{u}, \underline{v} \in H$
3. $\lambda\underline{u} \in H$ *voor alle* $\underline{u} \in H$ *en* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Stelling 9. *Als A een $(m \times n)$-matrix is, dan is $Col\,A$ een deelruimte van $\mathbb{R}^m$ en $Nul\,A$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.*

Definitie 6. *Een verzameling vectoren $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p\}$ in $\mathbb{R}^n$ heet een* **basis** *van H als :*

1. $H = Span\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p\}$
2. $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p\}$ *is lineair onafhankelijk.*

Stelling 10. *Als A een $(m \times n)$-matrix is, dan vormen de pivotkolommen van A een basis van $Col\,A$.*