FACULTEIT DER INFORMATICA
Datum: 27 juni 2002

Tentamen: Inleiding Logica ~~(211112)~~

3 juli ~~2002~~
13.30 – ~~17.00~~ uur

There is a limited number of English versions of this exam available. Ask the supervisor.

0.1 Aristotelische Logica

0.1.1 Vierkant van oppositie

Opgave 1. Beschrijf het vierkant van oppositie in de Aristotelische logica. Illustreer elk van de zes tegenstellingen in het vierkant met een voorbeeld.

Opgave 2. Geef de subalterne en de subcontraire tegenstellingen (volgens het vierkant van oppositie in de Aristotelische logica) van de propositie

Sommige mensen zijn apen.

Opgave 3.

a Beschrijf het vierkant van oppositie in de Aristotelische logica. Geef in Aristotelisch notatie (dus Aab, etc) weer welke proposities op de hoekpunten staan. Geef de proposities bij de hoekpunten weer in predicaatlogische notatie.

b Geef de subalterne en de subcontraire tegenstellingen van de propositie

Sommige honden zijn niet gehoorzaam.

Opgave 4. Beschouw de zin "een appel is gezond".

a. Geef deze zin weer in het formalisme van de Aristotelische logica.

b. Geef volgens het vierkant van oppositie alle tegenstellingen van deze zin, en geef aan welke tegenstelling het is.

0.1.2 Eulercirkels

Opgave 5. Laat met behulp van Eulercirkels zien dat in de Aristotelische logica geldt

$Aab \Rightarrow \neg Eab$

$Eab \Rightarrow Oab$

$Aab \Rightarrow Iba$

$Iab \vee Oab$

0.1.3 Syllogismen

Opgave 6. Beschouw de volgende (silly) syllogismen:

Sommige honden zijn vrienden
Sommige vrienden zijn geen dieren

Sommige honden zijn geen dieren

Alle potloden zijn instrumenten
Sommige instrumenten zijn geen soldaten

Sommige potloden zijn soldaten

Geen vervoermiddelen zijn race-apparaten
Sommige auto's zijn vervoermiddelen

Geen auto's zijn race-apparaten

Geen honden zijn katten
Sommige honden zijn vrienden

Sommige katten zijn geen vrienden

Geen vervoermiddelen zijn race-apparaten
Sommige auto's zijn vervoermiddelen

Geen auto's zijn race-apparaten

Sommige kikkers zijn geen bakker
Geen bakker is acteur

Geen acteur is kikker

a. Volgens welk schema is dit syllogisme opgebouwd (d.w.z. wat is de mood, wat is de figuur)?

b. Onderzoek met behulp van een Venn-diagram of het een geldig schema is.

c. Vertaal het syllogisme in predicaatlogica (voer daartoe zelf predicaatsymbolen in).

d. Als vraag *b*, maar nu met behulp van een semantisch tableau.

e. Als vraag *b*, maar nu met behulp van natuurlijke deductie.

f. Wat is volgens u het voornaamste verschil tussen de methodes bij de onderdelen *b* enerzijds, en *d* en *e* anderzijds?

0.2 Formele logica en wiskundige abstractie

0.2.1 Verzamelingenleer

Opgave 7. Beschouw één van de volgende axioma's van de verzamelingenleer.

- Extensionaliteitsaxioma ($\in$ staat voor "element van"):

$$\forall x, y\,(\forall z(z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y) \;\rightarrow\; x = y)$$

- Comprehensie-axioma (A is een predicaatsymbool):

$$\forall x\, \exists y\, \forall z(z \in y \;\leftrightarrow\; z \in x \wedge A(z))$$

- Machtsverzameling-axioma ($\in$ staat voor "element van", $\subseteq$ voor "deelverzameling van"):

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\,(z \in y \;\leftrightarrow\; z \subseteq x)$$

a. Leg in gewone taal uit wat dit axioma uitdrukt.

b. Motiveer of u het uitgedrukte principe aanvaardbaar/verdedigbaar vindt voor uw informele begrip van wat een verzameling is.

c. Onderzoek en motiveer of het axioma weggelaten kan worden uit de wiskundige verzamelingenleer, dus of er een verzamelingenleer kan bestaan waarin het niet waar is.

Opgave 8.

a. Beschrijf de wiskundige abstractie die optreedt bij de overgang van het gewone, dagelijkse verzamelingbegrip naar het wiskundige verzamelingbegrip.

b. De Russellverzameling is de verzameling

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Laat zien dat deze verzameling tot een tegenspraak zou leiden als hij zou bestaan.

c. Een oplossing voor de Russellparadox is om met een axioma uit te sluiten dat er verzamelingen bestaan die element zijn van zichzelf. Leg uit waarom deze oplossing in de wiskundige verzamelingenleer te rigoreus is, en hoe het toch mogelijk is dat er verzamelingen kunnen bestaan die wel element zijn van zichzelf zonder dat de Russellparadox weer optreedt.

d De Russelverzameling is de verzameling

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Deze definitie leidt volgens de gewone interpretatie van het verzamelingbegrip tot een contradictie, maar volgens de wiskundige interpretatie hoeft dat niet. Leg uit hoe het kan dat de wiskundige abstractie het tegenstrijdige van de Russellverzameling vermijdt.

e. Geef nog een voorbeeld waar een vergelijkbare wiskundige abstractie ook optreedt. Beschrijf deze abstractiestap voor uw voorbeeld en geef een gevolg ervan aan.

f. Beschrijf de algemene vorm van deze abstractie, dus beschrijf datgene dat gemeenschappelijk is aan bovenbedoelde concrete voorbeelden.

Opgave 9. Leg uit waarom in de moderne formele logica (o.a. de predicaatlogica) een assignment- en interpretatiefunctie nodig zijn om betekenis te geven aan de logische taal. Beschrijf wat deze functies doen en hoe ze werken (u hoeft niet hun formele definities te geven). Bespreek het verschil met de wijze waarop wij betekenis geven aan expressies en zinnen in onze alledaagse taal.

0.2.2 Denkende computers

Opgave 10. Een steeds terugkerend punt van discussie is of computers ooit zullen kunnen denken op de wijze zoals mensen dat in hun dagelijkse leven doen. Bekommentarieer dit punt vanuit het perspectief van de wiskundige abstractie.

0.2.3 Oneindigheid

Opgave 11. Er bestaan verschillende graden van oneindigheid, zoals aftelbare oneindigheid, overaftelbare oneindigheid, overoveraftelbare oneindigheid, etc. Er bestaat zelfs een rekenkunde waarin met dergelijke oneindige getallen gerekend kan worden.

Aan de andere kant bestaat er voor ons gevoel toch maar één soort oneindigheid.

Bespreek het verschil tussen wiskundige en intuïtieve oneindigheid, en verklaar waardoor het veroorzaakt wordt.

0.2.4 Gödel

Opgave 12.

a. Leg in gewone taal uit wat de onvolledigheidsstellingen van Gödel zeggen.

b. Bespreek het belang van deze stellingen voor de betrouwbaarheid van de wiskunde.

c. Beschrijf in eigen woorden drie belangrijke stappen uit het bewijs van die stellingen.

d. Gödel construeert een zin $\mathcal{G}$ die (in zekere zin) van zichzelf zegt dat hij niet *bewijsbaar* is. Leg uit op welke wijze deze zin over z'n eigen bewijsbaarheid kan spreken, en verklaar waarom de zin inderdaad niet bewijsbaar is, maar wel waar. Welke veronderstelling wordt daarbij gemaakt?

e. De leugenaarsparadox bestaat uit een zin $\mathcal{L}$ die van zichzelf zegt dat hij niet *waar* is. Leg uit waarom de Gödel-constructie waarmee $\mathcal{G}$ wordt geconstrueerd, niet opgaat voor $\mathcal{L}$.

f. Volgens velen is een gevolg van deze stellingen dat computers nooit zullen kunnen denken zoals mensen dat doen. Wat is volgens u de reden dat de Gödelstellingen zo g̈interpreteerd worden? Motiveer wat u van dit argument vindt.

g In de stellingen van Gödel wordt *bewezen* dat sommige *bewijzen* niet bestaan. Leg uit op welke manieren het woord "bewijzen" hier wordt gebruikt (afgezien van het feit dat het eerste gebruik een werkwoord is, en het tweede een zelfstandig naamwoord).

Opgave 13. Gödel construeert een zin $\mathcal{G}$ die (in zekere zin) van zichzelf zegt dat hij niet *bewijsbaar* is:

> Deze uitspraak is niet bewijsbaar.

De leugenaarsparadox bestaat uit een zin $\mathcal{L}$ die van zichzelf zegt dat hij niet *waar* is:

> Deze uitspraak is niet waar.

Leg uit waarom $\mathcal{L}$ een tegenspraak oplevert, en $\mathcal{G}$ niet.

Opgave 14. In de discussie over de mogelijkheid of een computer het menselijk denken in al zijn facetten kan simuleren, worden vaak de Gödelstellingen gebruikt om aan te tonen dat dat niet kan.

Dat gaat grofweg als volgt: een computer is een formeel apparaat dat volgens axioma's redeneert. Zo kan een computer bijvoorbeeld rekenen volgens de rekenkundige axioma's. Maar voor de gewone rekenkunde gelden de Gödelstellingen, dus zijn er uitspraken te formuleren waarvan wij als mens kunnen inzien dat ze waar zijn, maar die binnen het formele systeem niet bewezen kunnen worden. Dat wil zeggen dat een mens conclusies kan trekken die boven de redeneermogelijkheden van een computer uitgaan.

Bespreek dit argument, klopt het volgens u?

0.2.5 Modale logica

Opgave 15. Bij de vieze kindertjes puzzel moet de meester meerdere malen herhalen dat de vieze kinderen zich moeten gaan wassen (als er tenminste meer dan één vies kind is). Waarom moet de meester dat herhalen?

Met andere woorden, waarom kunnen de kinderen niet uit zichzelf bedenken dat ze zich na verloop van tijd moeten gaan wassen?

Opgave 16. Beschouw de volgende proposities uit de modale logica:

$$\begin{array}{rcl} \Box p & \rightarrow & \Box(\Box p) \\ \neg\Box p & \rightarrow & \Box(\neg\Box p) \end{array}$$

Beschouw de volgende interpretaties voor $\Box p$:

- p is noodzakelijk,
- ik weet dat p waar is,
- p is verplicht,
- p is altijd waar.

Geef in gewone taal weer wat bovenstaande proposities uitdrukken voor elk van deze interpretaties. Motiveer voor elk van deze interpretaties welke van bovenstaande proposities waar is (zijn) voor de interpretatie, en welke niet.

0.3 Paradoxen

0.3.1 Leugenaarsparadox

Opgave 17. De leugenaarsparadox luidt:

Deze zin is onwaar.

Beantwoord en/of geef kommentaar op de volgende vragen/opdrachten:

a. Is deze zin waar of onwaar?

b. Vertaal deze zin in de predicaatlogica.

c. Welke problemen komt u tegen?

Opgave 18. Een variant op de leugenaarsparadox luidt:

De volgende zin is waar.
De vorige zin is onwaar.

Beantwoord en/of geef kommentaar op de volgende vragen/opdrachten:

a. Zijn deze zinnen waar of onwaar?

b. Welke moeilijkheden kom je tegen als je deze zinnen in de predicaatlogica gaat vertalen?

c. Leg uit hoe dat komt.

Opgave 19. (Cantor's paradox) De verzameling S van alle verzamelingen is de grootste verzameling die er kan bestaan. Toch is de machtsverzameling van S (de verzameling van alle deelverzamelingen van S) groter dan S zelf.

Bekommentarieer deze paradox, zowel vanuit het informele perspectief op het verzamelingbegrip, als voor het wiskundige perspectief op het verzamelingbegrip.

0.4 Overig

0.4.1 President van de USA

Opgave 20. Beschouw de volgende twee redeneringen:

De president van de USA is opperbevelhebber van het leger,
Bush is president van de USA,
Dus Bush is opperbevelhebber van het leger.

De president van de USA wordt elke vier jaar gekozen,
Bush is president van de USA,
Dus Bush wordt elke vier jaar gekozen.

De eerste redenering klopt, de tweede niet. Leg uit hoe dat kan.

0.4.2 Studentenhuis

Opgave 21. Stel, je woont in een studentenhuis met twee huisgenoten, Henk en Piet. Bij thuiskomst zie je dat de afwas al is gedaan.

Beschouw de volgende twee beweringen:

- Als Henk de afwas niet heeft gedaan, dan heeft Piet het gedaan.

- Als Henk de afwas niet had gedaan, dan had Piet het gedaan.

Vragen:

a Wie heeft volgens deze beweringen de afwas gedaan?

b Zet beide beweringen om in een predicaatlogische formule, en bespreek de eventuele moeilijkheden die u daarbij tegenkomt.

Opgave 22. Stel, je woont in een studentenhuis met twee huisgenoten, Henk en Piet. Bij thuiskomst zie je dat de boodschappen al zijn gedaan.

Beschouw de volgende twee beweringen:

> Als Henk de boodschappen niet heeft gehaald, dan heeft Piet ze gehaald.
>
> Als Henk de boodschappen niet had gehaald, dan had Piet ze gehaald.

Wie heeft volgens deze beweringen de boodschappen gedaan?

Zet beide beweringen om in een predicaatlogische formule.

0.4.3 Zwarte raven

Opgave 23. Henk heeft al een paar keer tegen Piet gezegd dat alle raven zwart zijn. Elke keer als ze een raaf zien, zegt Henk: “Kijk, zie je nou wel, deze raaf is ook zwart, en dus zijn alle raven zwart”.

Piet krijgt daar een beetje genoeg van, en zegt: “Deze struik is groen. Dus alle raven zijn zwart”. “Wat heeft dat er nou mee te maken?”, vraagt Henk geïrriteerd. “Ik gebruik precies dezelfde redenering als jijzelf”, antwoordt Piet kortaf.

Is dat zo? Bespreek deze discussie vanuit het perspectief van de predicaatlogica.