Universiteit Twente

Afdeling Informatica,
Faculteit EWI

Studiejaar 2012-2013

Kwartiel 4

Tentamen
24 juli 2013

Inleiding Logica

(192111121)

Gebruik van studiemateriaal bij het tentamen is toegestaan. Inleveren van werk dat niet geheel zelf is gemaakt (er is afgekeken, er zijn briefjes doorgegeven, er is met elektronische hulpmiddelen draadloos advies ingewonnen, of vergelijkbare acties) is fraude.

Uw antwoord op de gestelde vragen moet onderbouwd worden met een duidelijke motivering. Het ontbreken van een toelichting is nadelig van invloed op het aantal te behalen punten. Dat geldt ook voor het geven van een onvolledige of onduidelijke toelichting.

Er zijn totaal 90 punten te behalen. Om het cijfer te bepalen wordt het aantal behaalde punten met 10 vermeerderd. Die som wordt door 10 gedeeld. Het resultaat van die deling wordt afgerond naar een naastgelegen natuurlijke getal.

Het tentamen heeft 6 opgaven, die staan op 4 bladzijden. De opgaven zijn **niet** gerangschikt van gemakkelijk naar moeilijk (en ook niet omgekeerd).

LET OP: U hebt 3 uur de tijd om de opgaven te maken, d.w.z. gemiddeld een half uur per opgave.

Vermeld op elk blad dat u inlevert uw naam, uw studentnummer en de naam van het vak .

Veel succes!!

Opgave 1 (10 punten).

Gegeven is de volgende Aristotelische redenering

Honden zijn geen klimgeiten.

Er zijn klimgeiten met horens.

Dus Sommige horendragers zijn geen hond.

(a) Geef Major en minor term van deze redenering.

(b) Geef de mood van de redenering.

(c) Analyseer de geldigheid van het redeneerschema.

Opgave 2 (16 punten).

Γ en Δ zijn verzamelingen propositielogische formules. φ en ψ zijn propositielogische formules die niet in Γ voorkomen.

Beschouw de volgende beweringen en beantwoord de bijbehorende vragen. Beargumenteer uw antwoord.

(a) Als $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi \rightarrow \psi$ dan $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Is dat juist?

(b) Laat gegeven zijn dat $\Gamma = \{p, q\}$. Is er een φ waarin alleen de propositievariabelen p en q voorkomen zodat $\Gamma \cup \{\varphi\}$ consistent is, maar $\Gamma \nvdash \{\varphi\}$.

(c) Als Γ consistent is, wat kunt u dan zeggen over de consistentie van de verzameling $A =_{\text{def}} \{ \varphi' \rightarrow (\psi' \rightarrow \varphi') \mid \varphi' \in \Gamma, \psi' \in \Delta \}$?

(d) Laat gegeven zijn dat $\Gamma = \{(p \rightarrow p) \rightarrow p \}$. Geef twee formules φ en ψ waarin alleen de propositievariabele p voorkomt, zodat zowel $\Gamma \cup \{\varphi\}$ als $\Gamma \cup \{\psi\}$ inconsistent zijn, terwijl ψ en φ niet aan elkaar equivalent zijn.

Opgave 3. (18 punten)

Toon met de tableaumethode aan dat

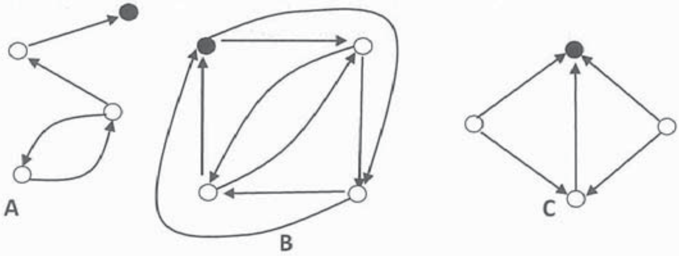
$\{ \forall x\, \exists y\, R(x,y),\ \forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow A(x)) \} \models \forall x\, A(x)$.

Opgave 4 (18 punten).

We beschouwen structuren met de volgende signatuur:

- er is één bijzonder element, aangeduid als *c*,
- er is één tweeplaatsige relatie.

We tekenen plaatjes van dergelijke structuren door de individuen voor te stellen als punten (kleine cirkeltjes), en de relatie tussen twee individuen door een pijl van het ene punt naar het andere. Het uitverkoren element *c* is het punt dat zwart is gemarkeerd. Zie de onderstaande drie plaatjes.



De taal die hierbij hoort is de taal van de predicaatlogica met één tweeplaastig predicaatsymbool en één constante. We gebruiken daarvoor de letters S en c.

(a) Geef twee zinnen φ_1, φ_2, en φ_3 zodat in elke structuur precies één van de drie waar is, d.w.z.

$\mathbf{A} \models \varphi_1$, , $\mathbf{B} \not\models \varphi_1$, en $\mathbf{C} \not\models \varphi_1$

$\mathbf{A} \not\models \varphi_2$, , $\mathbf{B} \models \varphi_2$, en $\mathbf{C} \not\models \varphi_2$

$\mathbf{A} \not\models \varphi_3$, , $\mathbf{B} \not\models \varphi_3$, en $\mathbf{C} \models \varphi_3$

(b) $\Gamma =_{\text{def}} \{ \forall x\,(x{=}c \vee \exists y\, S(x,y)),\ \forall x\, \neg S(c,x),$

$\quad \forall x\, \exists y\, (S(y,x) \wedge x{\neq}y \wedge \forall z\, (S(z,x) \rightarrow y{=}z)) \}$.

Er geldt $\mathbf{A} \models \Gamma$ (dat hoeft u niet te verifiëren).

Geef een tweede structuur **D** (met dezelfde signatuur als **A**) en ook met vier punten, zodat $\mathbf{D} \models \Gamma$.

Geef bovendien een zin φ zodat $\mathbf{D} \models \varphi$, maar $\mathbf{A} \not\models \varphi$

(c) Laat D_4 de zin zijn die uitdrukt dat er precies 4 individuen bestaan (u hoeft die zin niet te geven). Laat $\Delta =_{\text{def}} \Gamma \cup \{ D_4\}$, waarin Γ de verzameling zinnen is uit onderdeel (b) van deze opgave.

Wat zegt het bestaan van **D** en φ zoals beschreven in onderdeel (b) over de bewering "als $\mathbf{A} \models \psi$ dan $\Delta \vdash \psi$, voor elke zin ψ van de juiste signatuur"

Opgave 5 (18 punten).

Laat met natuurlijke deductie zien dat

$(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$.

Opgave 6 (10 punten).

Het bestaan van de Gödelzin ψ volgt uit een toepassing van Gödels diagonaallemma op de formule $\neg\exists y\, \chi(y,x)$. Geef in woorden weer wat deze formule uitdrukt, en geef de term die in deze formule voor x moet worden ingevuld om een zin te krijgen die equivalent is aan ψ.