Universiteit Twente

Afdeling Informatica,
Faculteit EWI

Studiejaar 2009-2010

Kwartiel 4

Uitwerking tentamen
van 23 juni 2010

Inleiding Logica

(211112)

Gebruik van studiemateriaal bij het tentamen is toegestaan. Inleveren van werk dat niet geheel zelf is gemaakt (er is afgekeken, er zijn briefjes doorgegeven, er is met elektronische hulpmiddelen draadloos advies ingewonnen, of vergelijkbare acties) is fraude.

Uw antwoord op de gestelde vragen moet onderbouwd worden met een duidelijke motivering. Het ontbreken van een toelichting is nadelig van invloed op het aantal te behalen punten. Dat geldt ook voor het geven van een onvolledige of onduidelijke toelichting.

Er zijn totaal 90 punten te behalen. Om het cijfer te bepalen wordt het aantal behaalde punten met 10 vermeerderd. Die som wordt door 10 gedeeld. Het resultaat van die deling wordt afgerond naar een naastgelegen natuurlijke getal.

Het tentamen heeft 6 opgaven, die staan op 4 bladzijden. De opgaven zijn **niet** gerangschikt van gemakkelijk naar moeilijk (en ook niet omgekeerd)

Vermeld op elk blad dat u inlevert uw naam, uw studentnummer en de naam van het vak .

Veel succes!!

Opgave 1 (15 punten).

We beschouwen de volgende redenering:

(1) Alle leden van het gezin hebben waterpokken.
(2) Koeien hebben nooit waterpokken.
Dus
(3) Sommige koeien zijn geen lid van het gezin.

(a) Beschrijf een context, en geef, in die context uw oordeel over de waarheid van de beweringen (1), (2) en (3).

Mijn context is een Nederlands veehoudersgezin, dat geheel getroffen is door de waterpokken:

(1) is ***waar.***

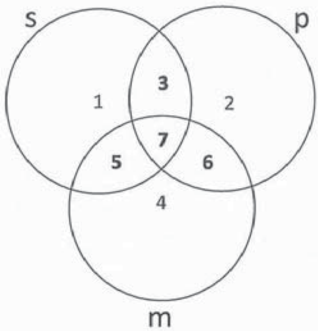
(2) is ***waar.*** *Althans, voorzover mijn kennis van biologie reikt*

*(3) is **waar**. Er zijn koeien, maar koeien tellen niet als gezinslid.*

(b) In de redenering komen drie termen voor: "lid van het gezin zijn", "waterpokken hebben" en "koe zijn". Welke is de major term, en welke is de minor term?
Denk om een argument!
De major term is het predicaat van de conclusie: lid van het gezin zijn
De minor term is het subject van de conclusie: koe zijn

(c) Wat is de mood van de redenering?
*De major premisse is van de vorm "alle wel": **A**.*
*De minor premisse is van de vorm "alle niet": **E**.*
*De conclusie is van de vorm "sommige niet": **O**.*
*De mood is **AEO**.*

(d) Is er een geldig redeneerschema toegepast? Licht uw antwoord toe door een diagram met uitleg.



A p m (alle p zijn m): 2+3 is leeg, in het bijzonder 3 is leeg
E s m (alle s zijn niet m): 5+7 is leeg
De gezochte conclusie is O s p, d.w.z. we willen concluderen dat 1+5 niet leeg is. Omdat we al weten dat 5 wel leeg is, zoeken we naar een overweging om te concluderen dat 1 niet leeg is.
De enige overweging die we daarvoor hebben, is dat s in zijn geheel niet leeg is.
In dit voorbeeld zien we inderdaad een niet lege s: "koe zijn."
***Maar het schema in zijn geheel is een existentiële drogreden.** Dat blijkt als je "koe zijn" door eenhoorn zijn vervangt.*

Opgave 2 (15 punten).

Γ is een verzameling propositielogische formules. φ en ψ zijn propositielogische formules die niet in Γ voorkomen.

Geef van de volgende uitspraken aan of zij juist zijn of niet (d.w.z. of zij kloppen voor alle Γ, φ en ψ zoals hierboven beschreven). Beargumenteer uw antwoord, uitgaande van een standaard semantische en syntactische sequent.

(a) Als $\Gamma \vdash ((\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \psi)\rightarrow \psi$ dan $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\psi$

Deze bewering is waar.

Kijk naar de onderstaande waarheidstafel. Daaruit blijkt dat $((\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \psi)\rightarrow \psi$ en $\varphi\rightarrow\psi$ in precies dezelfde contexten (d.w.z. onder precies dezelfde waarderingen) waar zijn. Dus als $\Gamma \models ((\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \psi)\rightarrow \psi$ dan $\Gamma \models \varphi\rightarrow\psi$. Maar omdat, vanwege correctheid en volledigheid van de syntactische sequent $\models$ gelijkwaardig is aan $\vdash$, volgt hieruit de gevraagde implicatie onmiddellijk.

φ	ψ	$\varphi\rightarrow\psi$	$(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \psi$	$((\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \psi)\rightarrow \psi$
0	0	**1**	0	**1**
0	1	**1**	1	**1**
1	0	**0**	1	**0**
1	1	**1**	1	**1**

(b) Als Γ en Δ beide consistent zijn, dan is $\Gamma \cup \Delta$ ook consistent.

Deze bewering is in zijn algemeenheid niet waar.

Neem bijvoorbeeld de eenvoudige situatie waar $\Gamma = \{p\}$ en $\Delta = \{\neg p\}$.

(c) Als $\Gamma \models \varphi\vee\psi$ en $\Gamma \not\models \psi$ dan $\Gamma \models \varphi$

Deze bewering is in zijn algemeenheid nietwaar.

Neem bijvoorbeeld de eenvoudige situatie waar $\Gamma = \varnothing$, $\varphi = p$ en $\psi = \neg p$.

(d) Als Γ en Δ beide consistent zijn, dan is de verzameling $\{ \varphi\vee\psi \mid \varphi\in \Gamma,\ \psi\in \Delta\}$ ook consistent.

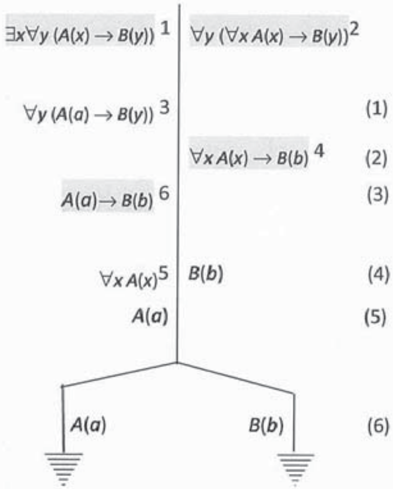
Deze bewering is waar.

Consistentie van Γ betekent dat er een waardering bestaat die alle formules $\varphi\in\Gamma$ gelijktijdig waar maakt. Maar dezelfde waardering maakt dan ook alle formules in een willekeurige verzameling $\{ \varphi\vee\psi \mid \varphi\in\Gamma\}$ gelijktijdig waar. Immers, als φ waar is, dan ook $\varphi\vee\psi$, ongeacht ψ.

Opgave 3. (15 punten)

Toon met de tableaumethode aan dat $\exists x \forall y\, (A(x) \rightarrow B(y)) \mid\!- \forall y\, (\forall x\, A(x) \rightarrow B(y))$.

Zie hieronder.
(1) getuigeregel voor $\exists$ links
(2) getuigeregel voor $\forall$ rechts
(3) instantiatieregel $\forall$ links
(4) implicatieregel rechts
(5) instantiatieregel $\forall$ links
(6) implicatieregel links
LET OP: wemoeten volgens de regels van het spel de twee getuigen in (1) en (2) verschillend kiezen. We kunnen daarna handig omspringen met instantiaties. Zo instantiëren we in regel (3) door b voor y in te vullen. Daar hadden we ook a kunnen invullen, maar b komt beter uit. In regel 5 vullen w a in, maar dat had ook b kunnen zijn. Deze keuze voor a komt beter uit.



Opgave 4 (18 punten).

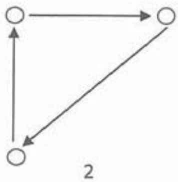
We beschouwen structuren met de volgende signatuur:

§ er zijn geen bijzondere elementen, aangeduid met een constante,

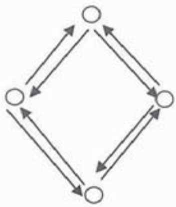
§ er is één tweeplaatsige relatie.

We tekenen plaatjes van dergelijke structuren door de individuen voor te stellen als punten (kleine cirkeltjes), en de relatie tussen twee individuen door een pijl van het ene punt naar het andere. Zie de onderstaande drie plaatjes.

1



2



3

De taal die hierbij hoort is de taal van de predicaatlogica met één tweeplaastig predicaatsymbool. We gebruiken daarvoor de letter S.

Om de "vertaling"van de predicaatlogische formules naar natuurlijke taal te vereenvoudigen, zullen we de woorden "opvolger"en "voorganger" gebruiken. Als er in een plaatje een pijl loopt van x naar y dan bestaat de relatie S(x, y) en zeggen we dat y een opvolger is van x, en dat x een voorganger is van y.

(a) Geef van de volgende vier zinnen aan in welke van de drie structuren zij waar zijn.

De letters T (True) en F (False) geven de waarheid/onwaarheid in de verschillende structuren aan.

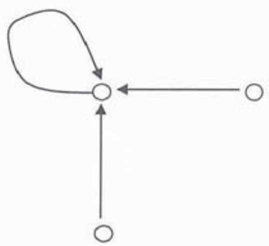
	1	2	3
$\forall x \forall y\ S(x,y)$			
Ieder tweetal punten staat in de voorganger-opvolger relatie	T	F	F
$\forall x \forall y(\exists z\ (S(x,z) \wedge S(z,y)) \rightarrow y \neq x)$			
De opvolger van een opvolger is niet het punt zelf	F	T	F
$\forall x \exists y \exists z(\ S(y,x) \wedge S(z,x) \wedge z \neq y)$			
Ieder punt heeft twee verschillende voorgangers	F	F	T

(b) Geef een zin die waar is in de structuren 2 en 3, maar niet in 1.
$\psi =_{def} \forall x \exists y\ (S(x,y) \wedge x \neq y)$

(c) Geef een zin die waar is in de structuren 1 en 2, maar niet in 3.
$\psi =_{def} \forall x \exists y\ (S(x,y) \wedge \forall z\ (S(x,z) \rightarrow y \neq z))$

(d) Geef een structuur met drie punten en drie pijlen waarvoor geldt:

$\forall x \forall y\ \exists z\ (S(x,z) \wedge S(y,z))$



Opgave 5 (15 punten).

Laat met natuurlijke deductie zien dat

$\{\exists z K(z), \forall x(K(x) \to \neg W(x)), \forall x(G(x) \to W(x))\} \vdash \exists x(K(x) \wedge \neg G(x))$.

$$
\dfrac{\exists x\, K(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{K(a)^1 \qquad \dfrac{\forall x(K(x) \to \neg W(x))}{K(a) \to \neg W(a)}\,(7)}{\neg W(a)}\,(5) \qquad \dfrac{G(a)^4 \qquad \dfrac{\forall x(G(x) \to W(x))}{G(a) \to W(a)}\,(8)}{W(a)}\,(6)}{\neg G(a)}\,(4)}{K(a) \wedge \neg G(a)}\,(3)}{\exists x(K(x) \wedge \neg G(x))}\,(2)}{\exists x(K(x) \wedge \neg G(x))}\,(1)
$$

De toegepaste inferentieregels zijn:

(1) $\exists$-eliminatie, bij deze toepassing worden de voorkomens van de aanname K(a), met daarin de getuige a voor de kwantor $\exists x$ ingetrokken.

(2) $\exists$-introductie

(3) $\wedge$-introductie

(4) $\neg$-introductie, de aanname G(a) wordt ingetrokken

(5) en (6) modus ponens, of $\to$-eliminatie

(7)en (8) instantiatie, of $\forall$-eliminatie

Opgave 6 (12 punten).

(a) Er is een formule $\exists y\, \chi'(y,x)$ in de Peano rekenkunde met de volgende eigenschap: als $\underline{m}$ het Gödelnummer van de formule φ is, en PA $\vdash \exists y\, \chi'(y,\underline{m})$ dan PA $\vdash \neg\varphi$. Volgens Gödel's diagonaal lemma bestaat er een zin ψ in de taal van de Peano rekenkunde, met de eigenschap dat PA $\vdash \psi \leftrightarrow \exists y\, \chi'(y,\underline{n})$ voor zekere $\underline{n}$. Welke $\underline{n}$ is dat?

Deze n is het Gödelnummer van ψ. De zin ψ zegt dus: mijn ontkenning is bewijsbaar.

(b) Wat is uw oordeel over de bewering PA $\vdash \psi$, waarin ψ de zin uit onderdeel (a) is.

Deze bewering is onjuist. Als PA $\vdash \psi$ dan ook PA $\vdash \exists y\, \chi'(y,\underline{n})$, waarbij $\underline{n}$ het Gödelnummer van ψ is. Dat wil zeggen dat $\exists y\, \chi'(y,\underline{n})$ een ware bewering is. Dat betekent, volgens de definitie van χ' dat PA $\vdash \neg\psi$. Paradoxaal.

(c) Beschouw de volgende (een tikje gekunstelde) uitspraak:

"Is, voorafgegaan door de aanhaling van zichzelf, een onwaarheid" is, voorafgegaan door de aanhaling van zichzelf, een onwaarheid.

Wat kunt u zeggen over de waarheid (of onwaarheid) van deze uitspraak?
Deze bewering, we noemen hem φ, is een paradox.
De structuurvan φ is:
x is, voorafgegaan door een aanhaling van zichzelf, een onwaarheid.
Stel dat φ waar is. Dat is dus "x"x een onwaarheid. Maar φ ***is*** *"x"x.*
Stel dat φ niet waar is. Dat is dus "x"x niet een onwaarheid. Dus "x"x (en dat ***is*** *φ) is waar.*
Uit de waarheid van φ volgt zijn onwaarheid en omgekeerd.
Paradox.