Universiteit Twente
Afdeling Informatica,
Faculteit EWI

Studiejaar 2010-2011
Kwartiel 4

Tentamen
22 juni 2011

Inleiding Logica

(192111121)

Gebruik van studiemateriaal bij het tentamen is toegestaan. Inleveren van werk dat niet geheel zelf is gemaakt (er is afgekeken, er zijn briefjes doorgegeven, er is met elektronische hulpmiddelen draadloos advies ingewonnen, of vergelijkbare acties) is fraude.

Uw antwoord op de gestelde vragen moet onderbouwd worden met een duidelijke motivering. Het ontbreken van een toelichting is nadelig van invloed op het aantal te behalen punten. Dat geldt ook voor het geven van een onvolledige of onduidelijke toelichting.

Er zijn totaal 90 punten te behalen. Om het cijfer te bepalen wordt het aantal behaalde punten met 10 vermeerderd. Die som wordt door 10 gedeeld. Het resultaat van die deling wordt afgerond naar een naastgelegen natuurlijke getal.

Het tentamen heeft 6 opgaven, die staan op 4 bladzijden. De opgaven zijn **niet** gerangschikt van gemakkelijk naar moeilijk (en ook niet omgekeerd)

Vermeld op elk blad dat u inlevert uw naam, uw studentnummer en de naam van het vak .

Veel succes!!

Opgave 1 (15 punten).

We beschouwen de volgende redenering:

(1) Honden zijn geen zoogdieren.
(2) Er zijn zoogdieren met horens.
Dus
(3) Sommige horendragers zijn geen hond.

(a) In de redenering komen drie termen voor: "hond zijn", "zoogdier zijn" en "horendrager zijn". Welke is de major term, en welke is de minor term?

(b) Wat is de mood van de redenering?

(c) Geef uw oordeel over de volgende uitspraak:
de geldigheid van de redenering berust op het feit dat zoogdieren bestaan.
Illustreer uw oordeel met een Venn-diagram (of Venn diagrammen).

Opgave 2 (15 punten).

Γ is een verzameling propositielogische formules. φ en ψ zijn propositielogische formules die noch in Γ noch in Δ voorkomen.

Geef van de volgende uitspraken aan of zij juist zijn of niet (d.w.z. of zij kloppen voor alle Γ, Δ, φ en ψ zoals hierboven beschreven). Beargumenteer uw antwoord, uitgaande van een standaard semantische en syntactische sequent.

(a) Als $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ dan $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \neg\varphi)$.

(b) Als Γ en Δ consistent zijn, dan is de verzameling $\{\varphi' \wedge \psi' \mid \varphi' \in \Gamma, \psi' \in \Delta\}$ ook consistent.

(c) Als $\Gamma \models \varphi$ en $\Delta \models \neg\varphi$ dan is er een formule $\chi \in \Delta$ zodat $\Gamma \vdash \neg\chi$.

(d) Als $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$ dan $\Gamma \models \varphi$ of $\Delta \models \varphi$.

(e) Als $\Gamma \cup \Delta$ consistent is, dan is er tenminste één formule χ zodat
$\Gamma \nvdash \chi$ en $\Delta \nvdash \chi$

Opgave 3. (15 punten)

Toon met de tableaumethode aan dat
$\{\exists y(\exists x A(x) \to \neg A(y))\} \vdash \forall x(A(x) \to \neg\forall y A(y))$

Opgave 4 (15 punten).

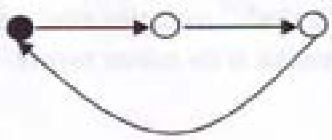
We beschouwen structuren met de volgende signatuur:

- er is één bijzonder element, aangeduid als *c*,
- er is één tweeplaatsige relatie.

We tekenen plaatjes van dergelijke structuren door de individuen voor te stellen als punten (kleine cirkeltjes), en de relatie tussen twee individuen door een pijl van het ene punt naar het andere. Het uitverkoren element *c* is de zwarte punt Zie de onderstaande drie plaatjes. Let op: structuur **A1** is oneindig.

A1

A2



A3

De taal die hierbij hoort is de taal van de predicaatlogica met één tweeplaastig predicaatsymbool en één constante. We gebruiken daarvoor de letters S en c.

(a) Geef van de volgende twee zinnen aan in welke van de drie structuren zij waar zijn.
$\forall x \forall y (S(x,y) \vee S(y,x))$;
$\forall x (S(x,c) \rightarrow \exists y\, S(y,x))$.

(b) Geef een zin $\psi(c)$ zodat $\mathbf{A1} \models \psi(c)$ maar $\mathbf{A2} \models \cancel{\psi}(c)$.

(c) Geef een zin φ zodat $\mathbf{A2} \models \varphi$ en $\mathbf{A3} \models \varphi$ maar $\mathbf{A1} \not\models \varphi$.

(d) Geef een structuur $\mathbf{B}$ met drie punten en vier pijlen waarvoor het volgende geldt:
$\mathbf{B} \models \forall x \exists y\, (S(x,y) \wedge S(y,c))$, $\mathbf{B} \models \forall x \exists y\, S(y,x)$, en $\mathbf{B} \models \exists x\, \neg S(x,x)$

(e) Geef een zin φ zodat
$\mathbf{A1} \models \varphi$,
terwijl bovendien voor elke andere structuur $\mathbf{B}$ geldt
Als $\mathbf{B} \models \varphi$ dan is $\mathbf{B}$ oneindig.

Opgave 5 (15 punten).

Laat met natuurlijke deductie zien dat

$\{ p \rightarrow q \} \vdash \neg p \vee q$

De structuur van de gevraagde deductie staat hieronder, en is al deels ingevuld. U hoeft slechts de ontbrekende formules in te vullen, en de toegepaste inferentieregels (2) t/m (5) te benoemen. De aard van regel (1) is gegeven, het is een negatie-eliminatie ($\neg$-E).

Maak ook duidelijk welke aannamen worden ingetrokken, en op welke plaats dat gebeurt.

p^3

__________ (5)

__________ (4)

____________________ (3)

$\neg p$

__________ (2)

____________________ (1, $\neg$-E)

Opgave 6 (15 punten).

We noemen een verzameling V van formules uit de Peano rekenkunde *Peano definieerbaar* als er een definiërende formule $\varphi(x)$ (in de taal van de Peano rekenkunde) bestaat, waarvoor het volgende het geval is.
Enerzijds:
als $\psi \in V$ dan is er een ψ' met Gödelnummer $\underline{n}$ zodat PA $\vdash (\psi \leftrightarrow \psi')$ en PA $\vdash \varphi(\underline{n})$,
en omgekeerd:
als ψ en ψ' formules zijn zodat PA $\vdash (\psi \leftrightarrow \psi')$, en PA $\vdash \varphi(\underline{n})$, waarbij $\underline{n}$ het Gödelnummer is van ψ', dan $\psi \in V$.

(a) Is Gödel's diagonaallemma equivalent met de bewering dat in iedere Peano definieerbare verzameling V een formule ψ te vinden is die zegt: "ik ben element van V"?

(b) Laat zien dat de verzameling $V =_{def} \{\varphi \mid \mathbf{N} \not\models \varphi\}$ niet Peano definieerbaar is.
N is hierin de structuur van de natuurlijke getallen
Hint: gebruik Gödel's diagonaallemma, en let verder niet op opgave (a)