Universiteit Twente
Afdeling Informatica, Faculteit EWI
18 juni 2008, 9:00 – 12:30 uur

Studiejaar 2007-2008
Kwartiel 4
Tentamen

Inleiding Logica
(211112)

Gebruik van studiemateriaal bij het tentamen is toegestaan. Inleveren van werk dat niet geheel zelf is gemaakt (er is afgekeken, er zijn briefjes doorgegeven, er is met elektronische hulpmiddelen draadloos advies ingewonnen, of vergelijkbare acties) is fraude.

Uw antwoord op de gestelde vragen moet onderbouwd worden met een duidelijke motivering. Het ontbreken van een toelichting is nadelig van invloed op het aantal te behalen punten. Dat geldt ook voor het geven van een onvolledige of onduidelijke toelichting.

Er zijn totaal 90 punten te behalen. Om het cijfer te bepalen wordt het aantal behaalde punten met 10 vermeerderd. Die som wordt door 10 gedeeld. Het resultaat van die deling wordt afgerond naar een naastgelegen natuurlijke getal.

Het tentamen heeft 7 opgaven, die staan op 4 bladzijden. De opgaven zijn **niet** gerangschikt van gemakkelijk naar moeilijk (en ook niet omgekeerd)

Vermeld op elk blad dat u inlevert uw naam, uw studentnummer en de naam van het vak .

Veel succes!!

Opgave 1 (12 punten).
We beschouwen de volgende redenering:

(1) Sommige docenten zijn kale mannen
(2) Alle kale mannen zijn brildragers
Dus
(3) Sommige brildragers zijn docent

(a) De beweringen (1) en (2) zijn de premissen van deze redenering. Welke is de Major premiss?
(b) In de redenering komen drie termen voor: docent, kale man en brildrager. Welke is de minor term, en welke is de middle term?
(c) Wat is uw oordeel over de waarheid van de beweringen (1), (2) en (3)?
(d) Wat is de mood van de redenering?
(e) Is er een geldig redeneerschema toegepast? Licht uw antwoord toe door een Venn diagram met uitleg, of door te "rekenen" met doorsneden en verschillen van verzamelingen.

Opgave 2 (18 punten).
Γ is een verzameling propositielogische formules. φ en ψ zijn propositielogische formules die niet in Γ voorkomen. De volgende feiten zijn gegeven:

$$\Gamma \vdash \varphi\ ;\ \ \Gamma \nvdash \psi$$

Onderdeel 2.1.

Deel elk van de volgende uitspraken in in één van de volgende categorieën:
T: deze uitspraak is aantoonbaar waar,
$\perp$: deze uitspraak is aantoonbaar niet waar,
O: er zijn onvoldoende gegevens om de uitspraak in één van de categorieën T of $\perp$ in te delen.

(a) $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(b) Γ is consistent.

(c) $\Gamma \cup \{\psi\}$ is consistent.

(d) $\Gamma \nvDash \neg\psi \to \varphi$.

(e) φ is geldig.

(f) ψ is niet geldig.

Onderdeel 2.2.

De status van de uitspraken die u hebt ingedeeld in de categorie O kan veranderen als meer gegevens beschikbaar zijn.

(a) Nu is ook gegeven dat $\psi \to \neg\varphi \in \Gamma$. Geef van alle uitspraken die u in de categorie O hebt ingedeeld aan of hun status daardoor verandert, en hoe dan. Bij de toelichting op uw antwoord mag u uiteraard verwijzen naar wat u in 2.1 al heeft opgemerkt.

Opgave 3. (15 punten)

Hieronder treft u een schematische afleiding (natuurlijke deductie) voor de zin $\forall x\, A(x) \to \neg\exists x\, \neg A(x)$.

(a) Vul de ontbrekende formules φ_1 t/m φ_5 correct in. Benoem daarbij alle regeltoepassingen, zoals de al ingevulde $\neg$-introductie (er zijn dus nog 4 regels te benoemen). Vermeld waar dat van toepassing is de aanname die door de regeltoepassing wordt geschrapt, zoals de al ingevulde (1a) bij de $\neg$-introductie.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_1^{\,1b} \qquad \dfrac{\varphi_3^{\,3} \qquad \dfrac{\neg A(y)^{2} \qquad \dfrac{\varphi_1^{\,1a}}{\varphi_2}}{\varphi_4}\ \neg\text{-introductie(1a)}}{\varphi_4}}{\varphi_5}}{\forall x\, A(x) \to \neg\exists x\, \neg A(x)}$$

(b) Toon met de tableaumethode aan dat $\forall z \forall y\, (A(z) \to B(y)) \models \forall y (\exists x\, A(x) \to B(y))$.
(U mag de tableaumethode presenteren als een opeenvolging transformaties op een verzameling van paren formuleverzamelingen, zoals in het hoorcollege 2007-2008, maar ook op de meer grafische en gebruikelijke manier zoals in het dictaat van Kuper)

Opgave 4 (18 punten).
We beschouwen de volgende predicaatlogische taal (een klein fragment van de taal van de rekenkunde).

- Er is een oneindige verzameling individuele variabelen;
- Er zijn geen individuele constanten;
- Er zijn geen predicaatletters;
- Er is gelijkheid (=);
- Er is één functiesymbool S.

Voor iedere n bestaat een zin D_n in deze taal (een zin waarin het functiesymbool S niet voorkomt) met de volgende eigenschap:

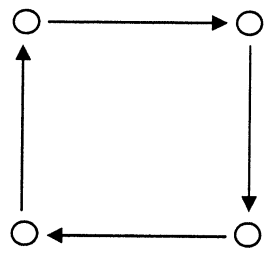
Als $\mathcal{A} \models D_n$ dan heeft het domein van $\mathcal{A}$ precies n elementen

(a) Geef D_3.

Laat Γ de verzameling zijn met de volgende 2 formules:

$$\Gamma = \{ D_4, \forall x \forall y\, (S(x)=S(y) \rightarrow x=y) \}$$

Beschouw nu de volgende simpele structuur $\mathcal{A}$, waarin de punten het domein vormen en de pijlen de interpretatie van S zijn (d.w.z. de pijlen wijzen van x naar $S(x)$).



Voor deze structuur geldt $\mathcal{A} \models \Gamma$.

(b) Geef een andere structuur $\mathcal{B}$ (in punten en pijlen) waarvoor ook geldt $\mathcal{B} \models \Gamma$.

(c) Is de bewering Th($\mathcal{A}$) = $\{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$ juist?

Opgave 5 (7 punten).
De Gödel zin heeft de vorm $\neg\exists x\ \varphi(x, \mathbf{n})$, waarin n de term $S(\ldots S(0)\ldots)$ is, met n voorkomens van de opvolgerfunctie S.
(a) Wat zijn de bijzondere eigenschappen van $\mathbf{n}$ die deze zin tot de Gödel zin maken?
(b) Geef de naam en de (precieze) formulering van het lemma waaruit het bestaan van deze term $\mathbf{n}$ volgt.

Opgave 6 (8 punten).
Een oude man overlijdt en laat zijn treurende kinderen achter in de veronderstelling dat hun vader zijn hele leven analfabeet is geweest en gebleven. Hij heeft nooit kunnen lezen, en nooit kunnen schrijven.
Dan vinden zijn kinderen tot hun enorme verrassing, bij het verdelen van de boedel, toch een briefje. Er staat:

Geen zin die ik heb geschreven is waar.

De kinderen kunnen niet anders concluderen dan dat hun vader dit geschreven moet hebben, en dat het ook de enige zin is die hij ooit geschreven heeft.

(a) Maar is die enige zin die vader geschreven heeft nu waar, of niet waar?

Jaren later besluiten de nieuwe bewoners van vaders oude huis tot een grondige opknapbeurt. Als zij de lagen behang in de slaapkamer verwijderen, vinden zij op de muur geschreven de volgende boodschap:

> Ik heb spijt van elke zin die ik geschreven heb.

We moeten aannemen dat vader deze boodschap hier lang geleden heeft achtergelaten. Hij heeft dus toch meer geschreven dan die ene zin uit onderdeel (a).

(b) Verandert deze vondst uw oordeel over de waarheid/onwaarheid van de oorspronkelijke zin uit onderdeel (a)? En zo ja, hoe dan?

Opgave 7 (12 punten).
Onder de axioma's van Zermelo voor de verzamelingenleer is geen axioma dat het bestaan van het product van twee verzamelingen formuleert. Informeel kunnen we het volgende opschrijven. Het product van twee verzamelingen a en b is de verzameling paren:

$$a \times b =_{\text{def}} \{ \langle x,y \rangle \mid x \in a \wedge y \in b \}$$

Maar in de taal van ZF moeten we nu eerst afspreken wat we zullen verstaan onder $\langle x,y \rangle$. Dat kunnen we bijvoorbeeld als volgt doen:

$$\langle x,y \rangle =_{\text{def}} \{ \{x\}, \{x,y\} \}$$

(a) Welke Zermelo axioma's (of welk Zermelo axioma) is dan nodig om te bewijzen

$$\forall x \forall y \exists z \, (z = \langle x,y \rangle)$$

Vervolgens beschrijven we $z = a \times b$ in de volgende vorm:

$$z = \{ u \in \mathbf{Q}(\mathbf{Q}\,(a \cup b)) \mid \exists v \exists w \varphi(u,v,w) \}$$

$\varphi(u,v,w)$ is daarin een formule die een aantal zaken tegelijkertijd uitdrukt, namelijk
(i) dat u twee elementen heeft: $v \in u \wedge w \in u \wedge \forall z \in u(z=v \vee z=w)$,
(ii) dat een van die twee elementen in de ander bevat is: $v \subset w$,
(iii) dat de grootste van de twee elementen van u zelf twee elementen heeft, de een uit a, de ander uit b: $\exists x \exists y(x \in w \cap a \wedge y \in w \cap b \wedge \forall z \in w(z=x \vee z=y))$, **en**
(iv) *(zie 7c hieronder).*

(b) Welke verzamelingstheoretische operatie is hier aangegeven met $\mathbf{Q}$?
(c) Wat is de niet ingevulde clausule (iv), in woorden en in formule?
(d) Welke Zermelo axioma's zijn nodig om te bewijzen dat deze z inderdaad bestaat?