Kenmerk : TW2013/DWMP/006/ha

Vak : **Grafentheorie**
Vakcode : 191520751
Datum : 29 januari 2013
Tijd : 13.45-16.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een rekenmachine is niet toegestaan. In dit tentamen wordt met een graaf G steeds een gewone graaf bedoeld (*simple graph*), d.w.z. G heeft geen lussen (*loops*) en twee verschillende punten worden hoogstens door één lijn verbonden.

1. [5 pt]

5 Toon aan dat als $\delta \geq 2$, dan bevat G een cykel van lengte minstens $\delta + 1$.
Hint: Toon eerst aan dat G een pad heeft van lengte minstens δ, en beschouw dan een langste pad in G.

2. [4 pt]

~ $\tau(G)$ is het aantal opspannende bomen (*spanning trees*) in de graaf G.
Bewijs de volgende stelling uit het boek:
Voor elke $e \in E(G)$ geldt: $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

3. [4 pt]

G is een samenhangende graaf met de volgende eigenschap.
Voor elke $e \in E(G)$ bestaan er twee cykels C_1 en C_2 in G zo dat $E(C_1) \cap E(C_2) = \{e\}$.
Toon aan dat G 3-lijnsamenhangend is.

3 4. [4 pt]

Geef een Hamiltoncykel in de graaf G in Figuur 1 (door de volgorde van de punten op zo'n cykel op te schrijven), of toon aan dat G niet Hamiltoniaans is.

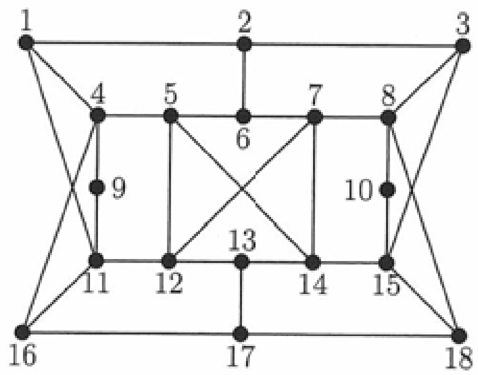

Figure 1: De graaf G bij opgave 4

z.o.z

3 5. (a) [2 pt] Formuleer de Stelling van Tutte, die nodig en voldoende voorwaarden geeft voor het bestaan van een perfecte matching in een graaf G.

(b) [3 pt] Teken een 4-reguliere graaf die geen perfecte matching heeft en geef aan waarom niet; of toon aan dat zo'n graaf niet bestaat.

6. [4 pt]
G is een graaf die verkregen is door in een k-reguliere graaf met een oneven aantal punten <u>minder</u> dan $\frac{k}{2}$ lijnen te verwijderen. Toon aan dat: $\chi' = \Delta + 1$.

7. [5 pt]
C_n is een cykel van lengte n. Toon aan dat: $\pi_k(C_n) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

8. [5 pt]
Laat $N = (V, A)$ een netwerk zijn met bron (*source*) x en put (*sink*) y. Laat f een stroom (*flow*) zijn in N. Bewijs de volgende stelling uit het boek:
Als N geen f-vergrotend pad (f-*incrementing path*) heeft, dan is f maximaal.
<u>Hint</u>: U mag gebruik maken van de stelling die zegt dat f maximaal is als N een snede (*cut*) K heeft met: val f = cap K.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

5 + 4 + 5