Kenmerk : TW2007/DWMP/55/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT/TEL**
Vakcode : 152161
Datum : 9 november 2007
Tijdstip : 9.00-12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. In deze opgave bekijken we rijtjes van twaalf cijfers, zoals 869945757310 en 001229321091.

   (a) [1 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?

   (b) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die bestaan uit drie nullen, vier enen en vijf tweeën?

   (c) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die alle cijfers bevatten, zoals 909857341026?

   Bij de volgende onderdelen is de volgorde van de cijfers niet van belang (dus het rijtje 309834917603 is hetzelfde als 480039936713)

   (d) [1 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?

   (e) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die alle oneven cijfers bevatten en niet meer dan twee vieren hebben, zoals 904157341221?

2. (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":

$$((p \to q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))) \Longleftrightarrow \neg(p \cancel{\wedge} \vee q).$$

   (b) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\begin{array}{l} \forall x\ [p(x) \vee q(x)] \\ \forall x\ [(\neg p(x) \wedge q(x)) \to r(x)] \\ \hline \therefore \forall x\ [\neg r(x) \to p(x)] \end{array}$$

3. Gegeven zijn de verzamelingen A, B en C in het universum $\mathcal{U}$. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende beweringen (NB: een Venn-diagram geldt niet als bewijs).

   (a) [3 pt] $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

   (b) [2 pt] $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \cup C) - (\overline{B} \cap C)$.

Z.O.Z

4. [4 pt]
   Laat $r \in R$, $r \neq 1$. Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat
   voor alle $n \geq 0$ geldt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.

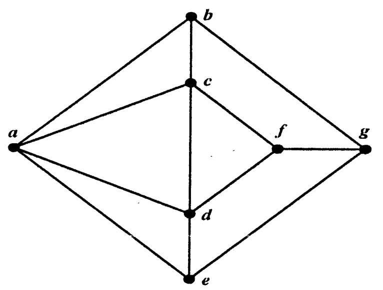
5. Laat $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De relatie R op A is gegeven door:

$$(x, y) \in R \iff x^2 - y^2 \text{ is deelbaar door } 3.$$

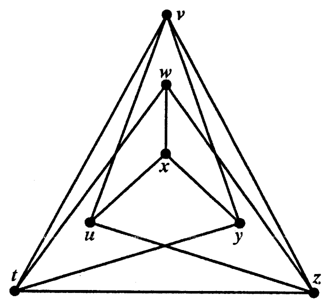
   (a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op A.

   (b) [2 pt] Bepaal de partitie van A die door R wordt geïnduceerd.

6. [3 pt]
   Beschouw onderstaande grafen G_1 en G_2.



Figuur 1: De graaf G_1



Figuur 2: De graaf G_2

   Onderzoek of G_1 en G_2 isomorf zijn. Zo ja, geef een isomorfisme; zo nee, motiveer waarom niet.

7. Gegeven is een boom $T = (V, E)$, met $|V| = n$.

   (a) [2 pt] Bepaal het aantal lijnen van het complement $\overline{T}$.

   (b) [2 pt] Toon aan dat $\kappa(\overline{T}) \leq 2$, d.w.z. dat $\overline{T}$ hoogstens twee componenten heeft.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

Laws of Logic

L1.	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Law of Double Negation
L2.	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	DeMorgan's Laws
L3.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutative Laws
L4.	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Associative Laws
L5.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive Laws
L6.	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotent Laws
L7.	$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$	Identity Laws
L8.	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$	Inverse Laws
L9.	$p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$	Domination Laws
L10.	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorption Laws
L11.	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
L12.	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
L13.	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	

Rules of Inference

R1. Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore q \end{array}$$

R2. Law of the Syllogism

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

R3. Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

R4. Rule of Conjunction

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

R5. Rule of Disjunctive Syllogism

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$$

R6. Rule of Contradiction

$$\begin{array}{l} \underline{\neg p \to F_0} \\ \therefore p \end{array}$$

R7. Rule of Conjunctive Simplification

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$$

R8. Rule of Disjunctive Amplification

$$\begin{array}{l} \underline{p} \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

R9. Rule of Conditional Proof

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \underline{p \to (q \to r)} \\ \therefore r \end{array}$$

R10. Rule for Proof by Cases

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \underline{q \to r} \\ \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

R11. Rule of the Constructive Dilemma

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \vee r} \\ \therefore (q \vee s) \end{array}$$

R12. Rule of the Destructive Dilemma

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\neg q \vee \neg s} \\ \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$$

Aanvullende wetten m.b.t. quantoren

N1. $\neg[\forall x\, p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, \neg p(x)$

N2. $\neg[\exists x\, p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, \neg p(x)$

Aanvullende afleidingsregels m.b.t. quantoren

U1. $\dfrac{\forall x\, p(x)}{\therefore p(c)}$ voor een willekeurige c in het universum

U2. $\dfrac{\exists x\, p(x)}{\therefore p(c)}$ voor een zekere c in het universum

U3. $\dfrac{p(c)}{\therefore \forall x\, p(x)}$ voor een willekeurige c in het universum

U4. $\dfrac{p(c)}{\therefore \exists x\, p(x)}$ voor een zekere c in het universum

U1: Rule of Universal Specification

U2: Rule of Existential Specification

U3: Rule of Universal Generalization

U4: Rule of Existential Generalization