Kenmerk : TW2009/DWMP/92/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT**
Vakcode : 152161
Datum : 6 november 2009
Tijdstip : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Gegeven zijn de 14 letters van het woord PARALLELLOGRAM.
Bepaal het aantal verschillende ordeningen van deze 14 letters als:

(a) [1 pt] Er verder geen restricties zijn.

(b) [2 pt] Alle letters L naast elkaar staan, zoals bij APOLLLLMAARERG.

(c) [3 pt] Alle letters L naast elkaar staan, of alle letters A naast elkaar staan, of alle letters R naast elkaar staan (met "of" wordt hier "$\vee$" bedoeld). Voorbeelden: LLROGAAALEPLRM; ORRMALLLLGEAAP en GAAARROELLLLMP.

2. (a) [2 pt] Toon aan dat het aantal ordeningen van m enen en r nullen ($r \geq m-1$), zonder dat er twee of meer enen naast elkaar staan, gelijk is aan $\binom{r+1}{m}$.

(b) [2 pt] Laat $A = \{1, 2, 3, \cdots, 20\} = \{n \in Z \mid 1 \leq n \leq 20\}$.
Bepaal $|\{C \subseteq A \mid |C| = 8 \wedge (i \in C \Rightarrow i+1 \notin C)\}|$.
Dus bepaal het aantal deelverzamelingen van A met 8 elementen, die geen opeenvolgende integers bevatten.
Hint: Gebruik (a).

3. (a) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":

$$((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r).$$

(b) [3 pt] Bewijs regel R11, met behulp van de overige "Laws of Logic" en "Rules of Inference".

(c) [2 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende argument:

$$\begin{array}{l} \exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \\ \forall x\,[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \underline{\neg \forall x\,[\neg p(x) \vee r(x)]} \\ \therefore \forall x\ [p(x) \rightarrow \neg r(x)] \end{array}$$

4. (a) [2 pt] Onderzoek met behulp van een *membership table* de geldigheid van het volgende statement over verzamelingen A, B en C in een universum $\mathcal{U}$:
$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

(b) [1 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende statement over een verzameling A: $A \cap \mathcal{P}(A) = \varnothing$.

Z.O.Z

5. [4 pt]
   Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat
   voor alle $n \geq 1$ geldt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$

6. (a) [2 pt] Gegeven is een verzameling A, met $|A| = n$. R is een antisymmetrische relatie op A. Bepaal de maximale waarde van $|R|$.

   (b) [2 pt] Gegeven is de verzameling $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   Definieer een relatie R op B zo dat de door R geïnduceerde partitie van B gelijk is aan $\{\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 6\}\}$.

7. [3 pt]
   Een *brug* in een graaf $G = (V, E)$ is een lijn $e \in E$ met de eigenschap dat $\kappa(G-e) > \kappa(G)$.
   Dus verwijdering van de lijn e vergroot het aantal componenten van de graaf.
   Bewijs dat, als alle graden in G even zijn, G geen brug bevat.

8. [4 pt]
   Gegeven is een graaf G. Bewijs dat de volgende twee statements equivalent zijn:
   (i) G is een boom
   (ii) G heeft geen cykels, maar voor elke lijn $e \notin E$ geldt:
   als e wordt toegevoegd aan G ontstaat exact één cykel.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

Laws of Logic

L1.	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Law of Double Negation
L2.	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	DeMorgan's Laws
L3.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutative Laws
L4.	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Associative Laws
L5.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive Laws
L6.	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotent Laws
L7.	$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$	Identity Laws
L8.	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$	Inverse Laws
L9.	$p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$	Domination Laws
L10.	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorption Laws
L11.	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
L12.	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
L13.	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	

Rules of Inference

R1.	$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$	Modus Ponens
R2.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	Law of the Syllogism
R3.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	Modus Tollens
R4.	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	Rule of Conjunction
R5.	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Rule of Disjunctive Syllogism
R6.	$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$	Rule of Contradiction
R7.	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	Rule of Conjunctive Simplification
R8.	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	Rule of Disjunctive Amplification
R9.	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \hline \therefore r \end{array}$	Rule of Conditional Proof
R10.	$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{array}$	Rule for Proof by Cases
R11.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore (q \vee s) \end{array}$	Rule of the Constructive Dilemma
R12.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$	Rule of the Destructive Dilemma

Aanvullende wetten m.b.t. quantoren

N1. $\neg[\forall x\, p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, \neg p(x)$

N2. $\neg[\exists x\, p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, \neg p(x)$

Aanvullende afleidingsregels m.b.t. quantoren

U1. $\dfrac{\forall x\, p(x)}{\therefore p(c)}$ voor een willekeurige c in het universum

U2. $\dfrac{\exists x\, p(x)}{\therefore p(c)}$ voor een zekere c in het universum

U3. $\dfrac{p(c)}{\therefore \forall x\, p(x)}$ voor een willekeurige c in het universum

U4. $\dfrac{p(c)}{\therefore \exists x\, p(x)}$ voor een zekere c in het universum

U1: Rule of Universal Specification

U2: Rule of Existential Specification

U3: Rule of Universal Generalization

U4: Rule of Existential Generalization