Kenmerk : TW2012/DWMP/032/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/TI/BIT**
Vakcode : 191521611 (TW); 191521610 (TI/BIT)
Datum : 27 januari 2012
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Een *pad* in het xy-vlak van het punt (a,b) naar het punt (c,d) is een reeks van stappen $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, met $(x_1,y_1)=(a,b)$ en $(x_n,y_n)=(c,d)$, zo dat voor elke $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ geldt: $(x_{i+1},y_{i+1})=(x_i+1,y_i)$ of $(x_{i+1},y_{i+1})=(x_i,y_i+1)$ (dus tekens één stap naar rechts òf één stap omhoog).
Bereken het aantal paden van $(0,0)$ naar $(9,7)$ indien:

   (a) [1 pt] Er verder geen restricties zijn.

   (b) [3 pt] De paden niet door de punten $(2,3)$ en $(6,6)$ mogen gaan.

2. Bereken het aantal manieren om één witte bal en negen (identieke) zwarte ballen te verdelen over zes genummerde bakken indien:

   (a) [2 pt] Er verder geen restricties zijn.

   (b) [2 pt] Er minstens één bak leeg moeten blijven.

3. Toon aan dat $[(\neg p\to q)\vee(r\wedge\neg p)]\leftrightarrow[p\vee q\vee r]$ een tautologie is

   (a) [2 pt] Met behulp van een waarheidtabel.

   (b) [3 pt] Met behulp van de "Laws of Logic".

4. [4 pt]
Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\begin{array}{l} \forall x\ [p(x)\vee q(x)] \\ \underline{\forall x\ [(\neg p(x)\wedge q(x))\to r(x)]} \\ \therefore \forall x\ [\neg r(x)\to p(x)] \end{array}$$

Z.O.Z

5. [4 pt]
A, B en C zijn verzamelingen in een universum $\mathcal{U}$. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende bewering

$$A \Delta C = B \Delta C \quad \Rightarrow \quad A = B.$$

(NB: een Venn-diagram geldt niet als bewijs)

6. [4 pt]
Laat $r \in R$, $r \neq 1$. Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \geq 0$ geldt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.

7. Laat $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
De relatie R op X wordt gegeven door: $(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

(a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op X.

(b) [1 pt] Beschrijf de equivalentieklassen van R; teken enkele equivalentieklassen in het xy-vlak.

(c) [1 pt] Is R ook antisymmetrisch?

8. [3 pt]
Een *snijpunt* in een graaf $G = (V, E)$ is een punt $v \in V$ waarvoor $\kappa(G - v) > \kappa(G)$ (hierbij stelt $\kappa(G)$ het aantal componenten van de graaf G voor).
Toon aan dat voor ieder snijpunt v in G geldt: $\overline{G} - v$ is samenhangend.

9. [4 pt]
Gegeven is een graaf $G = (V, E)$. Bewijs dat de volgende twee statements equivalent zijn:
(i) G is samenhangend en $|V| = |E| + 1$
(ii) G heeft geen cykels, maar voor elke lijn $e \notin E$ geldt:
de graaf die ontstaat als e wordt toegevoegd aan G bevat exact één cykel.
U mag in het bewijs gebruik maken van de stelling dat voor een boom $T = (V, E)$ geldt: $|V| = |E| + 1$.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten