Kenmerk	:	TW2011/DWMP/116/ha
Vak	:	**Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT**
Vakcode	:	191521610 (TW); 191521611 (INF/BIT)
Datum	:	1 februari 2011
Tijd	:	18.30–21.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Beschouw een stok van 52 speelkaarten; bestaande uit de kleuren, klaveren, ruiten, harten en schoppen. Van elke kleur zijn 13 kaarten, met de waarden 2, 3, ... , 10, boer, vrouw, heer en aas.

   (a) [2 pt] Op hoeveel manieren zijn de kaarten te verdelen over vier (verschillende) personen, zo dat elke persoon 13 kaarten krijgt?

   (b) [2 pt] Op hoeveel manieren kunnen vijf kaarten worden geselecteerd die samen "*two pairs*" vormen; d.w.z. twee verschillende paren en een vijfde kaart die een andere waarde heeft dan de twee paren, bijv. twee achten, twee boeren en een 3.

   Bij de onderdelen (c) en (d) wordt geen onderscheid gemaakt tussen de kleur van de kaarten (schoppen, harten, ruiten, klaveren). Bijv: de vier boeren worden nu beschouwd als vier identieke kaarten.

   (c) [2 pt] Op hoeveel manieren kunnen vier kaarten worden geselecteerd?

   (d) [3 pt] Op hoeveel manieren kunnen zeven kaarten worden geselecteerd?

2. (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":

$$((p \to q) \land (\neg q \land (r \lor \neg q))) \iff \neg(p \lor q)$$

.

   (b) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\begin{array}{l} \forall x\ [p(x) \lor q(x)] \\ \forall x\ [(\neg p(x) \land q(x)) \to r(x)] \\ \hline \therefore \forall x\ [\neg r(x) \to p(x)] \end{array}$$

z.o.z

3. (a) [1 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende bewering over een verzameling A in een universum $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(\overline{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{U}).$$

(b) [3 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende bewering over verzamelingen A, B en C in een universum $\mathcal{U}$:

$$(A \Delta C) = (B \Delta C) \Longrightarrow A = B.$$

4. [4 pt]
Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \geq 18$ geldt: n is te schrijven als som van vieren en zevens.
(Ofwel: voor alle $n \geq 18$ geldt: er bestaan $p, q \in \mathrm{N}$ zo dat: $n = 4p + 7q$)

5. Laat $X = \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \ \big(= \{\,(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x > 0, y > 0\,\}\big)$.
De relatie R op X wordt gegeven door: $(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1 y_2 = x_2 y_1$.

(a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op X.

(b) [1 pt] Beschrijf de equivalentieklassen van R; teken enkele equivalentieklassen in het xy-vlak.

(c) [1 pt] Is R ook een equivalentierelatie op $\mathrm{R} \times \mathrm{R}$?

6. [3 pt]
Gegeven is een zelf-complementaire graaf $G = (V, E)$, d.w.z.: G is isomorf met $\overline{G}$.
Bewijs dat $|V| = 4k$ of $|V| = 4k + 1$ voor zekere $k \in \mathrm{N}$.

7. Gegeven is een boom $T = (V, E)$, met $|V| = n$.

(a) [2 pt] Bepaal het aantal lijnen van het complement $\overline{T}$.

(b) [2 pt] Toon aan dat $\kappa(\overline{T}) \leq 2$, d.w.z. dat $\overline{T}$ hoogstens twee componenten heeft.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten