Kenmerk: EWI2016/TW/DMMP/MU (see page 4 for the English version)

Tentamen 2, Module 7, Vakcode 201400433

Discrete Structuren & Efficiënte Algoritmes

Maandag 04 april 2016, 13:45 - 16:45

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik van zelfgeschreven spiekbriefjes, één dubbelzijdig A4 per onderdeel (L&M,ALG,DW), is wel toegestaan. Indien u een onderdeel niet kunt oplossen dan kunt u het resultaat van dat onderdeel in latere onderdelen toch gebruiken.

Dit tentamen bestaat uit drie onderdelen, en is gebaseerd op de volgende, geschatte tijdsbesteding per onderdeel (slechts als indicatie):

Languages & Machines (L&M)	1h	(30 punten)
Algebra (ALG)	1h40min	(50 punten)
Discrete Mathematics (DW)	20 min	(10 punten)

Dus in totaal 30+50+10=90 punten. Incl. de 10 gratis punten zijn het 100 punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10.

Gebruik aub per onderdeel (L&M/ALG/DW) een nieuw vel!

Languages & Machines

1. (a) (6 pts) Transformeer de volgende contextvrije grammatica G stapsgewijs tot een equivalente contextvrije grammatica G', zodat G' geen kettingregels en geen λ-regels meer bevat.

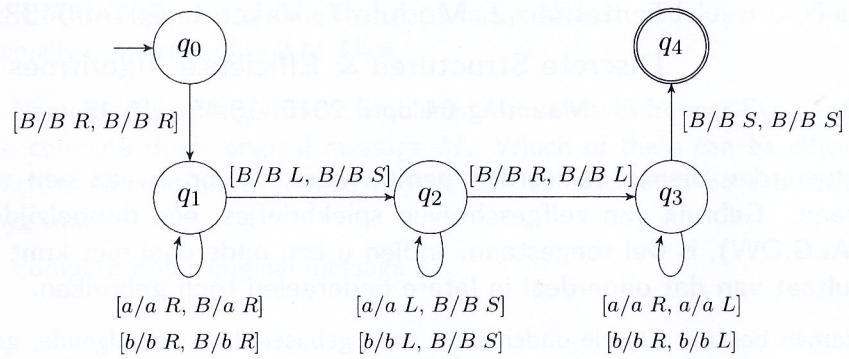
$$G = \begin{cases} S & \to & A\,B \\ A & \to & \lambda \mid a\,A \\ B & \to & C \mid b\,B \\ C & \to & c \mid c\,B \end{cases}$$

   (b) (2 pts) Is uw grammatica G' een reguliere grammatica? Waarom?

2. (a) (8 pts) Beschouw de contextvrije taal $L = \{a^i\,(ba)^j \mid j > i > 0\}$.
   Geef een *deterministische* PDA (stapelautomaat) voor L.
   Leg *kort* de werking van uw automaat uit.

   (b) (4 pts) Gegeven is een PDA P, een CFG G en een NFA M.
   Is de taal $(\mathcal{L}(P) \cap \mathcal{L}(M)) \cup \mathcal{L}(G)$ context-vrij? Waarom?

3. Beschouw de volgende Turing Machine (TM) met twee tapes.



We zetten de invoer op tape 1 en tape 2 start blanco. Bij invoer aba noteren we de startconfiguratie als volgt, waarbij B een blanco symbool op de tape is, en $*$ de positie van de koppen weergeeft:

$$[q_0; *BabaB; *BBBBB]$$

(a) (5 pts) Geef de berekening van deze TM voor het invoerwoord aba (om schrijfwerk te besparen mag u stappen binnen een toestand q_i overslaan). Wordt het woord aba geaccepteerd door bovenstaande TM?

(b) (5 pts) Welke taal wordt door deze TM *beslist*? (leg kort uit)

Algebra

4. Zij $G = U(14)$ (unitaire groep).

   (a) (3 pts) Bepaal de orde van $3 \in G$.

   (b) (3 pts) Is G cyclisch?

   (c) (5 pts) Bepaal een isomorfisme van G naar een ondergroep van S_6, de groep van permutaties van zes symbolen, door van elk element van G het beeld in S_6 te geven. Schrijf deze beelden in disjuncte-cykel-vorm.

   (d) (5 pts) Bepaal met behulp van de vorige onderdelen, dus zonder verdere berekeningen, de ordes van de elementen van G.

5. Zij $R = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$, hierbij is α een symbool met de eigenschap: $\alpha^2 = 2$. Op R gebruiken we de voor de hand liggende optelling en vermenigvuldiging zodat R een ring is.

   (a) (3 pts) Geef de definitie van nuldeler.

   (b) (6 pts) Ga na of R nuldelers heeft. Hint: beschouw $(a+b\alpha)(c+d\alpha) = 0$ en vermenigvuldig met $(a + 2b\alpha)(c + 2d\alpha)$ en werk uit.

   (c) (6 pts) Beredeneer dat R een lichaam is en bepaal $(1 + \alpha)^{-1}$.

6. (a) (3 pts) Geef de definitie van irreducibel polynoom in $\mathbb{F}[x]$.
   (b) (6 pts) Laat zien dat $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ met $g(x) = x^2 + 1$ en $h(x) = x^2 + 2x + 2$ de enige irreducibele monische polynomen, dwz leidende coëfficiënt gelijk aan één, van graad twee in $\mathbb{Z}_3[x]$ zijn.
   (c) (4 pts) Op hoeveel manieren kan een vierdegraadspolynoom *reducibel* zijn?
   (d) (4 pts) Laat zien dat $p(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibel is.
   (e) (2 pts) Construeer een lichaam van precies eenentachtig elementen en geef de algemene vorm van deze elementen.

Discrete Mathematics

7. Bekijk de RSA methode, en neem aan dat Alice de modulus $n = 55$ en de exponent $e = 3$ heeft gepubliceerd. Bob mailt het gecodeerde bericht $C = 2$ naar Alice.
   (a) (3 pts) Noem in het kort *alle* algoritmische problemen die afluisteraar Eve zou moeten oplossen om het oorspronkelijke bericht M van Bob te berekenen. Welke hiervan zijn efficient oplosbaar, en welke niet? Waarom wordt RSA dus in de praktijk als werkbare, en ook veilige methode beschouwd?
   (b) (7 pts) Bereken Bob's oorspronkelijke bericht M.

Exam 2, Module 7, Code 201400433

Discrete Structures & Efficient Algorithms

Monday, April 4, 2016, 13:45 - 16:45

All answers need to be motivated. No calculators. You are allowed to use a handwritten cheat sheet (A4) per topic (L&M,ALG,DM). Also if you cannot solve a part of an question you may use that result in subsequent parts of the question.

This exam consists of three parts, with the following (estimated) times:

Languages & Machines (L&M)	1h	(30 points)
Algebra (ALG)	1h 40 min	(50 points)
Discrete Mathematics (DM)	20 min	(10 points)

Total of 30+50+10=90 points. Including 10 bonus points that makes 100 points. Your exam grade is the total number pf points divided by 10.

Please use a new sheet of paper for each part (L&M/ALG/DW)!

Languages & Machines

1. (a) (6 pts) Transform the following context-free grammar G stepwise to an equivalent context-free grammar G', such that G' contains neither chain rules, nor λ-rules.

$$G = \begin{cases} S \rightarrow A\,B \\ A \rightarrow \lambda \mid a\,A \\ B \rightarrow C \mid b\,B \\ C \rightarrow c \mid c\,B \end{cases}$$

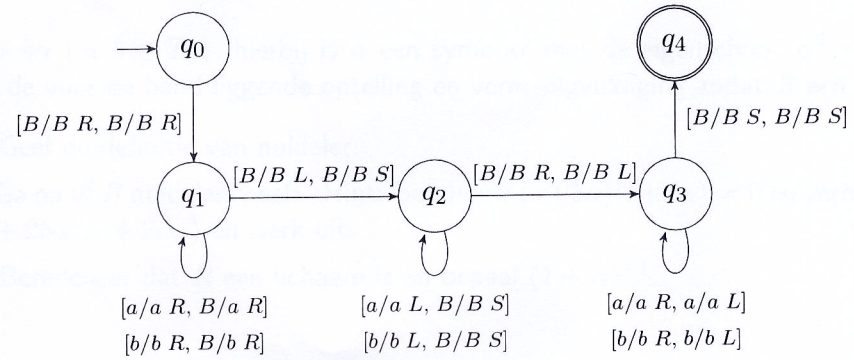
   (b) (2 pts) Is your grammar G' a regular grammar? Why?

2. Consider the context-free language $L = \{a^i\,(ba)^j \mid j > i > 0\}$.

   (a) (8 pts) Provide a *deterministic* PDA (stack automaton) for L.
   Explain *shortly* the working of your automaton.

   (b) (4 pts) Given are an arbitrary PDA P, a CFG G and an NFA M.
   Is the language $(\mathcal{L}(P) \cap \mathcal{L}(M)) \cup \mathcal{L}(G)$ context-free? Why?

3. Consider the following Turing Machine (TM) with two tapes.



The input is placed on tape 1, and tape 2 initially contains only blanks. Given input aba, we write the start configuration as follows, where B denotes the blank symbol, and $*$ shows the position of the tape heads:

$$[q_0; *BabaB; *BBBBB]$$

(a) (5 pts) Provide the computation for this TM on the input word aba (to save writing, you may skip steps that stay in a state q_i).
Will the word aba be accepted by the given TM?

(b) (5 pts) Which language will be *decided* by this TM? (explain shortly)

Algebra

4. Let $G = U(14)$ (unitairy group).

   (a) (3 pts) Determine the order of $3 \in G$.

   (b) (3 pts) Is G cyclic?

   (c) (5 pts) Construct an isomorphism from G to a subgroup of S_6, the permutation group of six symbols, by providing the image of each element of G in S_6. Write these images in disjoint cycle form.

   (d) (5 pts) Derive, without any calculations, the orders of all elements of G by using the previous parts.

5. Let $R = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$, here α is a symbol with the property: $\alpha^2 = 2$. On R we use the obvious addition and multiplication so that R becomes a ring.

   (a) (3 pts) Give the definition of zero divisor.

   (b) (6 pts) Investigate the existence of zero divisors in R. Hint: consider $(a+b\alpha)(c+d\alpha) = 0$ and multiply with $(a + 2b\alpha)(c + 2d\alpha)$.

   (c) (6 pts) Argue that R is a field and calculate $(1 + \alpha)^{-1}$.

6. (a) (3 pts) Provide the definition of irreducible polynomial in $\mathbb{F}[x]$.

   (b) (6 pts) Show that $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ with $g(x) = x^2 + 1$ and $h(x) = x^2 + 2x + 2$ are the only irreducible monic polynomials, that is with leading coefficient equal to one, of degree two in $\mathbb{Z}_3[x]$.

   (c) (4 pts) In how many ways can we write a polynomial of degree four as a product of nontrivial factors?

   (d) (4 pts) Show that $p(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ is irreducible.

   (e) (2 pts) Construct a field consisting of exactly 81 elements and give the general form of these elements.

Discrete Mathematics

7. Consider the RSA method, and assume that Alice has published modulus $n = 55$ and exponent $e = 3$. Bob emails ciphertext $C = 2$ to Alice.

   (a) (3 pts) Name briefly *all* algorithmic problems that an eavesdropper Eve needs to solve in order to compute Bob's original message M. Which of these can be efficiently solved, and which of them cannot? Argue why is RSA considered to be a practical, yet save cryptosystem.

   (b) (7 pts) Compute Bob's original message M.