Kenmerk: EWI2016/TW/DMMP/MU/20160406 (see page 4 for an English version)

Hertentamen 1, Module 7, Vakcode 201400433

Discrete Structuren & Efficiënte Algoritmes

Maandag 11 april 2016, 08:45 - 11:45

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik van zelfgeschreven formulebladen, één dubbelzijdig A4 per onderdeel, is wel toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit drie onderdelen, en is gebaseerd op de volgende, geschatte tijdsbesteding per onderdeel (slechts als indicatie):

Algorithms & Data Structures (ADS)	1h	(30 punten)
Discrete Mathematics (DW)	1h 20 min	(40 punten)
Languages & Machines (L&M)	40 min	(20 punten)

Dus in totaal 30+40+20=90 punten. Het tentamen cijfer is het totaal aantal punten plus 10, gedeeld door 10.

Gebruik aub per onderdeel (ADS/DW/L&M) een nieuw vel!

Algorithms & Data Structures

1. (10 punten) Beschouw het volgende algoritme (met $*$ vermenigvuldigen en // integer division, bv. 7 // 2 = 3):

```
def func(n):
    if n<=1:
        return 100

    value=1
    int k=5
    while k>1:
        value = value*func(n//16)
        k=k-1

    return value
```

   (a) Geef een recurrente betrekking van de tijdscomplexiteit van dit algoritme, uitgedrukt in het aantal rekenkundige operaties.

   (b) Wat is de complexiteitsklasse van dit algoritme?

2. (5 punten)

   Geef een algoritme dat het grootste element in een maxheap verwijdert, en oplevert: een heap met de overgebleven elementen. De complexiteit van het algoritme moet $O(log\ n)$ zijn.

3. (5 punten) Geef een algoritme dat voor een niet-lege binary search tree oplevert: een node met de grootste waarde kleiner-of-gelijk aan de maximumwaarde in de boom (en beargumenteer je oplossing). De boom kan duplicaten bevatten!

4. (10 punten) Gegeven een rugzak met een maximale capaciteit G aan gewicht. Gegeven n voorwerpen 1 t/m n waarbij elk voorwerp i een gewicht w_i heeft. Neem aan dat alle gewichten integers zijn. Het doel is de rugzak in te pakken met zoveel mogelijk gewicht aan voorwerpen.

   (a) Stel je hebt op een bepaald moment nog de voorwerpen 1 t/m i, en je hebt nog g gewicht beschikbaar in je rugzak. Definieer $R(i,g)$ als het ongebruikte gewicht van de rugzak dat je overhoudt als je zoveel mogelijk gewicht aan voorwerpen uit 1 t/m i aan de rugzak toevoegt.

   Beargumenteer welk van de volgende recurrente betrekkingen geldt:

   - $R(i,g) = w_i + max\{R(i-1,g), R(i,g-1)\}$
   - $R(i,g) = min\{R(i-1,g), R(i-1,g-w_i)\}$
   - $R(i,g) = w_i + min\{R(i-1,g), R(i,g)\}$
   - $R(i,g) = min\{R(i-1,g), R(i,g-w_i)\}$

   (b) Geef een algoritme om te bepalen wat het maximum gewicht is dat je in de rugzak kunt stoppen. De complexiteit mag niet slechter zijn dan kwadratisch in n.

Discrete Wiskunde

5. (5 punten) Laat zien dat de Diophantische vergelijking $236s + 24t = 2$ geen oplossing heeft voor $s, t \in \mathbb{Z}$.

6. (10 punten)

   (a) Noem a_n het aantal strings uit $\{0,1,2\}^*$ van lengte n die geen opeenvolgende 1en en ook geen opeenvolgende 2en bevatten. Bepaal a_1, a_2, en een recurrente betrekking voor a_n, $n \geq 3$. (Je hoeft deze betrekking niet op te lossen.)

   (b) Bereken de oplossing van de volgende recurrente betrekking

   $$a_n - 10a_{n-1} + 21a_{n-2} = 60 \cdot 3^n \quad (n \geq 2) \quad \text{met} \quad a_0 = 2 \text{ en } a_1 = -5\,.$$

7. (7 punten) Laat $G = (V, A)$ een gerichte graaf zijn, met capaciteiten $u_a \geq 0$ op de lijnen $a \in A$. Laat $n = |V|$ en $m = |A|$. Laat $s, t \in V$ en laat x een maximum (s,t)-flow zijn, waar $x_a \geq 0$ de waarde van de flow op lijn $a \in A$ is. Laat $v(x)$ de totale waarde van deze maximum (s,t)-flow x zijn.

   Hoe kun je met gegeven x een *minimum cut* in G berekenen? Dus hoe vindt je een subset $S \subseteq V \setminus \{t\}$ met $s \in S$ zodat de totale capaciteit van alle lijnen van S naar $V \setminus S$ gelijk is aan $v(x)$, ofwel, $\sum_{(v,w)\in(S,V\setminus S)} u_{(v,w)} = v(x)$. Beredeneer je antwoord, en geef ook een bovengrens voor de rekentijd aan, waarbij je O( )-notatie mag gebruiken.

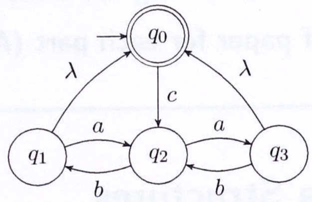
8. (5 punten) Neen aan dat je een ongerichte graaf $G = (V, E)$ hebt met $|E| = 30$, en $d(v) \geq 3$ voor alle $v \in V$. Hoeveel punten V kan de graaf dan hebben? Geef zowel een bovengrens als ook een benedengrens.

9. (5 punten) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: In een minimaal opspannende boom voor een willekeurige ongerichte graaf $G = (V, E)$ zij elke twee punten $v, w \in V$ verbonden met een kortste (v, w)-pad.

10. (8 punten) Hoeveel mogelijkheden zijn er om seven niet opeenvolgende hele getallen te kiezen uit $\{1, 2, \ldots, 50\}$? Gebruik een genererende functie.

Languages & Machines

11. (11 punten) Beschouw de volgende NFA-λ, M:



(a) Construeer stapsgewijs een reguliere expressie E, zodat $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(M)$.

(b) Geef de λ-closure en de input-transitie functie van M in een tabel.

(c) Transformeer automaat M systematisch naar een (incomplete) DFA.

12. (9 punten) We introduceren de volgende 4 talen:

- de taal $L_1 := \{a^i\, b^i\, b^j \mid 0 \leq i \text{ en } 0 \leq j\}$
- de taal $L_2 := \{a^i\, b^j\, b^j \mid 0 \leq i \text{ en } 0 \leq j\}$
- L_3 is een (willekeurige) *eindige* taal.
- L_4 is een (willekeurige) *niet-reguliere* taal.

Geef aan of de volgende talen (altijd) regulier zijn of niet. Toon je antwoord aan door een constructie of een bewijs te geven.

(a) taal L_1

(b) taal L_2

(c) taal $L_4 - L_3$

Re-Exam 1, Module 7, Code 201400433

Discrete Structures & Efficient Algorithms

Monday, April 11, 2016, 08:45 - 11:45

All answers need to be motivated. No calculators. You are allowed to use a handwritten cheat sheet (A4) per topic (ADS, DM, L&M).

This exam consists of three parts, with the following (estimated) time requirements:

Algorithms & Data Structures (ADS)	1h	(30 points)
Discrete Mathematics (DW)	1h 20 min	(40 points)
Languages & Machines (L&M)	40 min	(20 points)

Total 30+40+20=90 points. Your exam grade is the total number of points plus 10, divided by 10.

Please use a new sheet of paper for each part (ADS/DM/L&M)!

Algorithms & Data Structures

1. (10 punten) Consider the following algorithm:

```
def func(n):
    res=0

    while n>0:
        m=n
        while m>0:
            res=res+m
            m=m-1
    return res
```

   (a) Give a recurrence relation for the time complexity of this algo- rithm, expressed in the number of arithmetical operations.

   (b) Suppose the number of steps of an algorithm, denoted by $T(n)$ for an input of size n, is given by the recurrence relation

   $$T(n) = 8T(n/2) + n^3 + 4n + 1/n$$

   What is the asymptotical complexity of this algorithm?

2. (5 punten) Give an algorithm that deletes the one-but-smallest element in a non-empty minheap, and yields a minheap with the remaining elements. The complexity of the algorithm should be $O(log\ n)$.

3. (5 punten) Given a non-empty binary search tree; such a tree contains a node with the minimum value in that tree. Give an algorithm that yields *another* node containing the successor value for the minimum, i.e. the smallest value bigger-or-equal than the minimum value (and motivate your solution). The tree may contain duplicates!

4. (10 punten) A doctor has to see n patients. For each patient i the estimated time for seeing the patient is t_i minutes (an integer). The doctor should work at least T minutes, but wants to work as little time as possible. The overwork is the time the doctor works more than T minutes, so the objective is to minimize the overwork.

   We define a function $O(i,t)$ indicating the amount of overwork for an optimal choice from the patients $i,\ldots,n$ if the doctor should still work at least t minutes. Clearly $O(i,0) = 0$ for $1 \leq i \leq n+1$ (because then there is 0 minutes overwork, so optimal) and $O(n+1,t) = \infty$ if $t > 0$ (because then there are no more patients for the t minutes the doctor should still work).

   (a) Motivate which of the following recurrence relations holds:
   - $O(i,t) = min(t_i - t, O(i+1,t))$
   - $O(i,t) = min(O(i+1, t-t_i), O(i+1,t))$
   - $O(i,t) = min(t_i - t, O(i+1,t))$ als $t_i \geq t$, en $O(i,t) = min(O(i+1, t-t_i), O(i+1,t))$ anders

   (b) Give an algorithm to determine the minimum overwork time of the doctor. The complexity may be no worse that quadratic in n.

Discrete Mathematics

5. (5 points) Show that the Diophantine equation $236s + 24t = 2$ does not have a solution where $s,t \in \mathbb{Z}$.

6. (10 points)

   (a) Denote by a_n the number of strings in $\{0,1,2\}^*$ of length n without consecutive 1's and without consecutive 2's. Give a_1, a_2, and a recurrence relation for a_n, $n \geq 3$. (You do not need to solve it.)

   (b) Solve the recurrence relation

   $$a_n - 10a_{n-1} + 21a_{n-2} = 60 \cdot 3^n \quad (n \geq 2) \quad \text{with} \quad a_0 = 2 \text{ and } a_1 = -5\,.$$

7. (7 points) Let $G = (V,A)$ be a directed graph with arc capacities $u_a \geq 0$, $a \in A$. Let $n = |V|$ and $m = |A|$. Let $s,t \in V$ and let x be a maximum (s,t)-flow, where $x_a \geq 0$ is the flow value on arc $a \in A$. Let $v(x)$ be the value of this maximum (s,t)-flow x.

   How can you compute a *minimum cut* in G from x? So how do you find a subset $S \subseteq V \setminus \{t\}$ with $s \in S$ so that the total capacity of all arcs from S to $V \setminus S$ are equal to $v(x)$. In other words, $\sum_{(v,w)\in(S,V\setminus S)} u_{(v,w)} = v(x)$. Argue why your answer is correct, and also give an upper bound on the computation time, using O( )-notation.

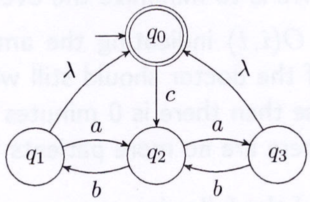
8. (5 points) Suppose you are given an undirected (simple) graph $G = (V,E)$ with $|E| = 30$, and $d(v) \geq 3$ for all $v \in V$. How many nodes can the graph possibly have? Give both an upper and a lower bound.

9. (5 points) Prove or give a counterexample: In a minimal spanning tree for any given graph $G = (V,E)$, any two nodes $v,w \in V$ are connected by a shortest (v,w)-path.

10. (8 points) How many ways are there to select seven nonconsecutive integers from $\{1,2,\ldots,50\}$? Use a generating function.

Languages & Machines

11. (11 points) Consider the following NFA-λ, M:



   (a) Construct step by step a regular expression E, with $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(M)$.
   (b) Give a table with the λ-closure and input-transition function of M.
   (c) Transform the automaton M systematically to an (incomplete) DFA.

12. (9 points) We introduce the following 4 languages:

   - The language $L_1 := \{a^i\, b^j\, a^i \mid 0 \le i \text{ and } 0 \le j\}$
   - The language $L_2 := \{a^i\, a^i\, b^j \mid 0 \le i \text{ and } 0 \le j\}$
   - L_3 is an (abritrary) *finite* language.
   - L_4 is an (arbitrary) *non-regular* language.

   Indicate whether the following languages are regular or not. Demonstrate your answers by providing a construction or a proof.

   (a) language L_1
   (b) language L_2
   (c) language $L_4 - L_3$