Kenmerk : TW2012/DWMP/065/ha

Vak : **Calculus II voor TI**
Vakcode : 191521020
Datum : 8 november 2012
Tijdstip : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1. (a) [3 pt] Bepaal $c \in \mathbb{R}$ zo dat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{cn}} = 5.$

   Hint: Meetkundige reeks (*geometric series*).

   (b) [3 pt] Onderzoek of de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+3n^3}-n}{n^3+\sqrt{2n^4+n}}$ convergent of divergent is.

   (c) [4 pt] Toon aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ relatief convergent (*conditionally convergent*) is,

   en bepaal $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\displaystyle\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{\ln n}\right| < 10^{-3}.$

2. (a) [3 pt] Toon aan dat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)(-2)^n x^{3n}$ een machtreeks-representatie is van de functie $f(x) = \dfrac{1-4x^3}{(1+2x^3)^2}$. Geef tevens de convergentiestraal.

   (b) [2 pt] Toon aan dat: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{4^n} = \frac{8}{3}.$ Hint: Gebruik onderdeel (a).

3. [3 pt]
   De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + xy^2 - y^2}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Onderzoek of f continu is in $(0,0)$.

z.o.z

4. De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door: $f(x, y, z) = xze^{yz}$. Verder is gegeven het punt $P = (1, 0, -1)$.

   (a) [3 pt] Bepaal een eenheidsvector **u** waarvoor $D_{\mathbf{u}}f(P)$ maximaal is en bepaal tevens de maximale waarde van $D_{\mathbf{u}}f(P)$.

   (b) [2 pt] Bepaal een vergelijking van het raakvlak (*tangent plane*) aan het niveauoppervlak (*level surface*) $f(x, y, z) = -1$ in punt P.

   (c) [3 pt] Bepaal met behulp van de kettingregel voor functies van drie variabelen $\dfrac{df}{dt}(2)$ als: $x(t) = \sqrt{t-1}$, $y(t) = \ln(t^2 - 3)$ en $z(t) = \sin(\frac{3\pi}{t})$.

5. [5 pt]
   Bepaal de (vier!) kritieke punten van de functie $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$, alsmede hun aard (locaal maximum, locaal minimum, zadelpunt).

6. [5 pt]
   D is het gebied in het eerste kwadrant (d.w.z. $x \geq 0$, $y \geq 0$) dat wordt ingesloten door de parabool $y = x^2$ en de lijnen $2x + y - 8 = 0$ en $x - 2y + 1 = 0$.
   Maak een duidelijke schets van D en bereken $\displaystyle\iint_D x \, dA$.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten