Kenmerk : TW2010/DWMP/110/ha

Vak : **Calculus II voor INF**
Vakcode : 191521020
Datum : 4 november 2010
Tijdstip : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1. (a) [2 pt] Toon aan dat $0,\overline{28} = \frac{28}{99}$. Hierbij is $0,\overline{28} = 0,28282828....$

   (b) [3 pt] Formuleer de limiet-vergelijkingstest (*limit comparison test*) voor reeksen en onderzoek daarmee of de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}+2n}{\sqrt{n^7+n^2+1}}$ convergent of divergent is.

   (c) [3 pt] Toon aan dat de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ relatief convergent (*conditionally convergent*) is.

2. (a) [3 pt] Bepaal het convergentie-interval van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

   (b) [3 pt] Geef een machtreeksrepresentatie van de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{1+8x^3}dx$. Geef tevens de convergentiestraal.

3. [3 pt]
De functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Onderzoek of f continu is in $(0,0)$.

Z.O.Z

4. De functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gegeven door: $f(x, y) = \ln(x - y^2)$.

(a) [1 pt] Maak een duidelijke schets van het definitiegebied (*domain*) van f.

(b) [2 pt] Teken in één plaatje de niveaukrommen (*level curves*) $f(x, y) = c$, voor $c = -1$, $c = 0$ en $c = 1$. Geef duidelijk aan welke niveaukromme bij welke waarde van c hoort.

(c) [2 pt] Bepaal een eenheidsvector $\mathbf{u}$ waarvoor de richtingsafgeleide $D_{\mathbf{u}} f(5, -2)$ maximaal is en bepaal voor deze $\mathbf{u}$ de waarde van $D_{\mathbf{u}} f(5, -2)$.

(d) [1 pt] Er bestaat een verband tussen de vector $\mathbf{u}$ uit onderdeel (c) en een niveaukromme van f. Welke niveaukromme is dit en wat is het verband?

(e) [3 pt] Bepaal met behulp van de kettingregel voor functies van twee variabelen $\frac{\partial f}{\partial t}(3, -1)$ als: $x(s, t) = st^2$ en $y(s, t) = s - 2t^2$.

5. [5 pt]
Bepaal de grootste en de kleinste waarde van de functie $f(x, y, z) = 8x - 4z$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$.

6. D is het gebied in het eerste kwadrant (d.w.z. $x \geq 0$, $y \geq 0$) dat wordt ingesloten door de x-as, de lijn $2x + y = 2$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 4$.

(a) [3 pt] Maak een duidelijke schets van D en schrijf $I = \iint_D f(x, y)\, dA$ op twee manieren (twee integratie-volgorden) als herhaalde integralen.

(b) [2 pt] Bereken I in het geval dat $f(x, y) = xy^2$.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten