Kenmerk : TW2007/DWMP/54/ha

Vak	:	**Calculus II voor INF/TEL**
Vakcode	:	152102
Datum	:	31 oktober 2007
Tijdstip	:	13.30-16.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een rekenmachine is toegestaan (ter controle), maar de gevraagde berekeningen dienen exact te worden uitgevoerd, tenzij expliciet om een (decimale) benadering wordt gevraagd.
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. (a) [2 pt] Toon aan dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{3}{10}$.
Hint: herschrijf tot een meetkundige reeks (*geometric series*).

   (b) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ convergent of divergent is.

   (c) [3 pt] Onderzoek m.b.v. de integraaltest of de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ convergent of divergent is.

   (d) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 - n}$ absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent is.

2. (a) [2 pt] Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+1)^n}{(-2)^n}$.

   (b1) [2 pt] Bepaal een machtreeksrepresentatie van $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$.

   (b2) [1 pt] Gebruik (b1) om een machtreeksrepresentatie te bepalen van $\int \frac{x}{1+x^3} dx$.

   (b3) [1 pt] Gebruik (b2) om de integraal $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1+x^3} dx$ te benaderen met een fout kleiner dan 10^{-4}.

Z.O.Z

3. (a) [1 pt] Geef, voor een functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de (limiet)-definitie van de partiële afgeleide van g naar y in het punt (a, b).

De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) [1 pt] Bepaal $f_y(x, y)$, voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) [2 pt] Bepaal $f_y(0, 0)$ m.b.v. de (limiet)-definitie (zie (a)).

4. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door: $f(x, y) = xye^{x^3+xy^2-2x}$.

(a) [3 pt] Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, -1, -1)$.

(b) [2 pt] Bepaal de maximale waarde van de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, -1)$.

(c) [2 pt] Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de niveaukromme (*level curve*) $f(x, y) = -1$ in het punt $(1, -1)$.

(d) [1 pt] Bepaal, m.b.v. impliciet differentiëren, $\dfrac{dy}{dx}$ uit de vergelijking $f(x, y) = 0$.

5. [4 pt]
De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door: $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$.
Bepaal de kritieke punten van f, alsmede hun aard (locaal maximum, locaal minimum of zadelpunt).

6. Gegeven is de integraal $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1}\, dxdy$.

(a) [1 pt] Maak een duidelijke schets van het integratiegebied.

(b) [4 pt] Bereken de integraal door verwisseling van de integratievolgorde.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

Formuleblad bij Calculus II voor INF/TEL (152102)

Studiejaar 2007/2008

STANDAARDLIMIETEN VOOR FUNCTIES

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ (voor alle $p \in \mathbb{R}$, $a > 1$)

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ (voor alle $p > 0$)

(3) $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = 0$ (voor alle $p > 0$)

STANDAARDLIMIETEN VOOR RIJEN

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ (als $p > 0$)

(2) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (als $|r| < 1$)

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ (voor alle $\alpha > 0$)

AFGELEIDEN VAN STANDAARDFUNCTIES

(1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(2) $\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$ $(k \in \mathbb{R})$

(3) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(4) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

(5) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

(6) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(7) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(8) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

(9) $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

STANDAARD TAYLORREEKSEN MET CONVERGENTIE-INTERVAL

(1) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (x \in (-1,\,1))$$

(2) $$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(3) $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(4) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(5) $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (x \in [-1,\,1])$$

(6) $$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (x \in (-1,\,1))$$

Hierbij is $k \in \mathbb{R}$ en $\displaystyle\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$ en $\displaystyle\binom{k}{0} = 1$

LIJST VAN PRIMITIEVEN

(1) $$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \qquad (k \neq -1)$$

(2) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

(3) $$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$$

(4) $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

(5) $$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

(6) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

(7) $$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

(8) $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

(9) $$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$