Kenmerk : TW2009/DWMP/89/ha

Vak	:	**Calculus II voor INF/TEL**
Vakcode	:	152102
Datum	:	28 oktober 2009
Tijdstip	:	13.45-16.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1. (a) [2 pt] Toon aan dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{2n+1}} = -\frac{2}{33}$.

   (b) [3 pt] Formuleer de vergelijkingstest (*comparison test*) voor reeksen en toon daarmee aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ convergent is.

   (c) [3 pt] Toon aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ relatief convergent (*conditionally convergent*) is.

2. (a) [4 pt] Bepaal het convergentie-interval van de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x+1)^n}{n^2+1}$.

   (b) [3 pt] Geef een machtreeksrepresentatie van de integraal $\displaystyle\int \frac{\ln(1+3x^2)}{x}\,dx$.
   Geef tevens de convergentiestraal van deze machtreeks.
   Hint: gebruik de Taylorreeks $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad (x \in (-1,1))$.

3. (a) [1 pt] Geef, voor een functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de (limiet)-definitie van de partiële afgeleide van g naar y in het punt (a, b).

   De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2+y^2) & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (b) [1 pt] Bepaal $f_y(x,y)$, voor $(x,y) \neq (0,0)$.

   (c) [2 pt] Bepaal $f_y(0,0)$ m.b.v. de (limiet)-definitie (zie (a)).

Z.O.Z

4. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door: $f(x,y) = xye^{x^3+xy^2-2x}$.

(a) [3 pt] Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1,-1,-1)$.

(b) [2 pt] Bepaal de maximale waarde van de richtingsafgeleide van f in het punt $(1,-1)$.

(c) [2 pt] Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de niveaukromme (*level curve*) $f(x,y) = -1$ in het punt $(1,-1)$.

(d) [1 pt] Bepaal, m.b.v. impliciet differentiëren, $\dfrac{dy}{dx}$ uit de vergelijking $f(x,y) = 0$.

5. [5 pt]
Bepaal de grootste en de kleinste waarde van de functie $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ op het gebied $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16 \}$.

6. [4 pt]
Maak een duidelijke schets van het integratiegebied en bereken door verwisseling van integratie-volgorde: $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\, dydx$.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten