Kenmerk : TW2016/DWMP/001/ha

Vak : **Calculus II voor TI**
Vakcode : 191521020
Datum : 28 januari 2016
Tijdstip : 13.45–16.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Bij het tentamen mag één enkelzijdig handgeschreven papier met aantekeningen gebruikt worden. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1. √(a) [2 pt] Toon met behulp van de Integraaltest aan (controleer de voorwaarden!) dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergent is.

(b) [2 pt] Laat $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Bepaal k zo dat: $s - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-2}$.

√(c) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\mathrm{e}^{n-1}}$ convergent of divergent is, en bepaal in geval van convergentie de som van de reeks.

(d) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+1}+2n}{\sqrt{n^7+n^2+1}}$ convergent of divergent is.

2. √(a) [4 pt] Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$$

.

√(b) [3 pt] Geef een machtreeksrepresentatie van de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{1+8x^3}\,dx$. Geef tevens de convergentiestraal.

Z.O.Z

3. De functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+1}$.
Verder is gegeven het punt $P = (1,-1)$.

(a) [2 pt] Laat zien dat de gradiënt van f in het punt P gelijk is aan $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(b) [2 pt] Bepaal het 2e-graads Taylorpolynoom van f rond het punt P.

(c) [2 pt] Bepaal een eenheidsvector $\mathbf{u}$ waarvoor de richtingsafgeleide $D_{\mathbf{u}}f$ in het punt P, maximaal is. Bepaal tevens de maximale waarde van de richtingsafgeleide van f in het punt P.

(d) [2 pt] Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de niveaukromme $f(x,y) = 1$ in het punt P.

(e) [3 pt] Laat de functies $x, y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door:
$x(s,t) = \dfrac{1}{s+t^2}$ en $y(s,t) = \mathrm{e}^{st(s-t)}$.
Verder is gegeven een functie $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Geef m.b.v. de kettingregel een uitdrukking voor $\dfrac{\partial h}{\partial t}(3,2)$, waarbij $h(s,t) = g(x(s,t), y(s,t))$.

4. [5 pt]
Bepaal de grootste en de kleinste waarde van de functie $f(x,y,z) = 8x - 4z$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$.

5. [5 pt]
D is het gebied in het eerste kwadrant (d.w.z. $x \geq 0$, $y \geq 0$) dat wordt ingesloten door de x-as, de lijn $2x + y = 2$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 4$.

(a) [3 pt] Maak een duidelijke schets van D en schrijf $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\, dA$ op twee manieren (twee integratie-volgorden) als herhaalde integralen.

(b) [2 pt] Bereken I in het geval dat $f(x,y) = xy^2$.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten