Kenmerk : TW2010/DWMP/96/ha

Vak	:	**Calculus II voor INF/TEL**
Vakcode	:	152102
Datum	:	25 januari 2010
Tijdstip	:	08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1. (a) [2 pt] Bewijs m.b.v. de integraaltest dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergent is (controleer ook de voorwaarden van de integraaltest).

   (b) [2 pt] Laat $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Bepaal k zo dat: $s - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3} < 10^{-3}$.

   (c) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 - \sqrt{n}}$ convergent of divergent is.

   (d) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$ convergent of divergent is.

2. (a) [4 pt] Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$$

   (b) [3 pt] Geef een machtreeksrepresentatie van de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{1+8x^3} dx$. Geef tevens de convergentiestraal.

Z.O.Z

3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+1}$.
Verder is gegeven het punt $P = (1, -1)$.

(a) [2 pt] Laat zien dat de gradiënt van f in het punt P gelijk is aan $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(b) [2 pt] Bepaal het 2e-graads Taylorpolynoom van f rond het punt P.

(c) [2 pt] Bepaal een eenheidsvector $\mathbf{u}$ waarvoor de richtingsafgeleide $D_{\mathbf{u}}f$ in het punt P, maximaal is. Bepaal tevens de maximale waarde van de richtingsafgeleide van f in het punt P.

(d) [2 pt] Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de niveaukromme $f(x,y) = 1$ in het punt P.

(e) [3 pt] Laat de functies $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door:
$x(s,t) = \dfrac{1}{s+t^2}$ en $y(s,t) = \mathrm{e}^{st(s-t)}$.
Verder is gegeven een functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Geef m.b.v. de kettingregel een uitdrukking voor $\dfrac{\partial h}{\partial t}(3,2)$, waarbij $h(s,t) = g(x(s,t), y(s,t))$.

4. [5 pt]
De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door: $f(x,y,z) = xy + z^2$. Bepaal de grootste en de kleinste waarde van f onder de nevenvoorwaarden $x - y = 0$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5. [5 pt]
D is het gebied in $\mathbb{R}^2$ dat wordt ingesloten door de positieve x-as, de positieve y-as, de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de lijn $x + y = 2$. Bereken $\displaystyle\iint_D y \, dA$.

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten